Superfici

V. Tibullo, rev.1, 04/04/2006.

1 Integrali di superficie

Consideriamo una *superficie* S nello spazio tridimensionale R^3. Il concetto di superficie è noto dalla geometria elementare e non se ne darà una definizione precisa. Basti per il momento fare l'analogia con le curve: una curva è essenzialmente il codominio in R^3 di una funzione definita su un intervallo di R, e quindi è interpretabile come una deformazione in R^3 di tale intervallo. Allo stesso modo una superficie si può vedere come la deformazione in R^3 di un rettangolo, o più in generale di un dominio piano.

Come esempi di superfici possiamo pensare alla superficie di una sfera, o anche solo ad una parte di essa, per esempio la superficie di una semisfera, o ancora possiamo pensare alla superficie laterale di un cilindro o di un cono.

Una superficie si dirà *chiusa* se delimita completamente un dominio tridimensionale, altrimenti si dirà aperta, ed in tal caso ci sarà una curva chiusa che fa da *bordo* alla superficie. Una superficie chiusa non ha bordo. La superficie di una sfera è una superficie chiusa, mentre la superficie di una semisfera e la superficie laterale di un cono sono superfici aperte; il bordo in entrambi i casi è una circonferenza.

Consideriamo poi una funzione definita in tutti i punti della superficie. Dato che i punti della superficie sono punti di R^3, avremo che la funzione sarà una funzione di tre variabili x, y, z. Vogliamo definire l'integrale della funzione f esteso alla superficie S, e lo indicheremo con

$$\int_S f(x, y, z)\, dS$$

Per fare ciò seguiremo un procedimento di limite. Consideriamo una suddivisione della superficie in n superfici elementari S_i, abbastanza piccole da poter essere considerate approssimativamente piane e da poter considerare la funzione all'incirca costante su ciascuna di esse. Consideriamo poi la somma (*somma integrale*)

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i$$

dove (x_i, y_i, z_i) è un arbitrario punto di S_i mentre ΔS_i è la misura della sua area (che sappiamo calcolare, essendo una superficie piana). Considerando suddivisioni della superficie S costituite da superfici elementari sempre più piccole, il valore della somma scritta precedentemente tende ad un valore numerico che è, per definizione, il valore dell'integrale di superficie. Se indichiamo con ΔS la misura dell'area più grande delle superfici S_i, porremo

$$\int_S f(x,y,z)\,dS \equiv \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i$$

Un esempio di utilizzo dell'integrale di superficie si ha nel calcolo della massa, del centro di massa e degli elementi della matrice d'inerzia di un lamina non piana, che può essere descritta matematicamente come una superficie. In questo caso, indicata con μ la densità, si ha

$$m = \int_S \mu(x,y,z)\,dS$$

$$G - O = \frac{1}{m} \int_S (P - O)\,\mu(x,y,z)\,dS$$

$$I_x = \int_S (y^2 + z^2)\,\mu(x,y,z)\,dS \qquad I_y, I_z = \ldots$$

$$I_{xy} = -\int_S xy\mu(x,y,z)\,dS \qquad I_{yz}, I_{zx} = \ldots$$

Un altro esempio di utilizzo dell'integrale di superficie si ha nel calcolo del flusso di un campo vettoriale, per esempio del flusso del campo elettrico attraverso una superficie. Dato un campo vettoriale $\mathbf{v}$, il flusso è definito nel seguente modo

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore normale alla superficie nel punto considerato, e che varia da punto a punto. Questo tipo di integrale prende il nome di *flusso* di un campo vettoriale attraverso una superficie, o anche integrale di superficie di seconda specie.

Osserviamo che nel calcolo del flusso di un campo vettoriale, è necessario fissare un orientamento del versore $\mathbf{n}$, ovvero un verso sulla superficie: una delle due facce della superficie è considerata quella positiva, quella dal cui lato esce il versore, mentre l'altra è quella negativa.

2 Calcolo degli integrale di superficie

Per calcolare un integrale di superficie è necessario avere una rappresentazione parametrica della superficie, ovvero una terna di funzioni

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

definite in un dominio piano B, ed il cui codominio coincida con l'insieme dei punti della superficie S. Si considerano poi i vettori tangenti alla superficie

$$\begin{cases} \mathbf{t}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \\ \\ \mathbf{t}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k} \end{cases}$$

In termini di questi, il vettore normale alla superficie è dato da

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v$$

ed in generale non è unitario, né necessariamente diretto secondo il verso positivo stabilito sulla superficie.

Il calcolo dell'integrale di superficie si riduce al calcolo di un integrale doppio, secondo la formula seguente:

$$\int_S f(x, y, z)\, dS = \int_B f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$$

dove A, B, C sono nell'ordine le componenti del vettore $\mathbf{n}$, che in generale dipendono dal punto, ovvero da u, v.

Il calcolo del flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie si riduce al calcolo di un integrale doppio, secondo la formula seguente:

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_B (v_x A + v_y B + v_z C) dudv$$

dove, per non appesantire la notazione, non si è indicata la dipendenza delle componenti del campo e delle componenti del vettore normale da x, y, z, e quindi da u, v. Si osservi inoltre che, qualora il verso del vettore $\mathbf{n}$ fosse opposto rispetto a quello relativo all'orientamento della superficie, il risultato andrà cambiato di segno.

3 Teorema della divergenza

C'è un importante teorema che mette in relazione il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa e l'integrale triplo (integrale di volume) della divergenza del campo esteso al dominio delimitato dalla superficie. Si chiama *Teorema della divergenza*, ed in formule è espresso dalla seguente relazione

$$\int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V} \operatorname{div} \mathbf{v} dV$$

dove $dV = dxdydz$, e $S = \partial V$ indica la superficie che delimita il dominio V; inoltre bisogna precisare che la superficie si intende orientata in modo tale che il versore normale sia diretto esternamente al dominio V.

Per dare una dimostrazione empirica, ovvero non formale, di questo teorema, consideriamo un dominio V e suddividiamolo in tanti piccolissimi cubi (in realtà parallelepipedi) V_i. In prossimità della frontiera del dominio l'approssimazione è più grossolana, ma migliora con il diminuire della dimensione dei cubi.

Cominciamo con il dimostrare il teorema per il singolo cubetto, ovvero verifichiamo che

$$\int_{\partial V_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_i} \operatorname{div} \mathbf{v} dV$$

L'integrale di superficie diventa uguale alla somma degli integrali sulle singole facce del cubo, e questi integrali di superficie li approssimiamo ciascuno con il prodotto della funzione integranda per l'area della relativa faccia del cubo. Per le due facce ortogonali all'asse x, i versori $\mathbf{n}$ sono dati da $-\mathbf{i}$ e $+\mathbf{i}$, e quindi si ha

$$\mathbf{v}\left(x_i, y_i, z_i\right) \cdot (-\mathbf{i})\, \Delta y_i \Delta z_i + \mathbf{v}\left(x_i + \Delta x_i, y_i, z_i\right) \cdot (+\mathbf{i})\, \Delta y_i \Delta z_i$$

dove Δx_i, Δy_i, Δz_i rappresentano le tre misure dei lati del cubo, e quindi $\Delta y_i \Delta z_i$ è la misura dell'area della faccia ortogonale all'asse x. Facendo la stessa cosa per le altre due coppie di facce parallele, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \simeq\ & \mathbf{v}\left(x_i, y_i, z_i\right) \cdot (-\mathbf{i})\, \Delta y_i \Delta z_i + \mathbf{v}\left(x_i + \Delta x_i, y_i, z_i\right) \cdot (+\mathbf{i})\, \Delta y_i \Delta z_i + \\
& \mathbf{v}\left(x_i, y_i, z_i\right) \cdot (-\mathbf{j})\, \Delta x_i \Delta z_i + \mathbf{v}\left(x_i, y_i + \Delta y_i, z_i\right) \cdot (+\mathbf{j})\, \Delta x_i \Delta z_i + \\
& \mathbf{v}\left(x_i, y_i, z_i\right) \cdot (-\mathbf{k})\, \Delta x_i \Delta y_i + \mathbf{v}\left(x_i, y_i, z_i + \Delta z_i\right) \cdot (+\mathbf{k})\, \Delta x_i \Delta y_i \\
=\ & \left(-v_x\left(x_i, y_i, z_i\right) + v_x\left(x_i + \Delta x_i, y_i, z_i\right)\right) \Delta y_i \Delta z_i + \\
& \left(-v_y\left(x_i, y_i, z_i\right) + v_y\left(x_i, y_i + \Delta y_i, z_i\right)\right) \Delta x_i \Delta z_i + \\
& \left(-v_z\left(x_i, y_i, z_i\right) + v_z\left(x_i, y_i, z_i + \Delta z_i\right)\right) \Delta x_i \Delta y_i
\end{aligned}$$

moltiplicando e dividendo il primo termine per Δx_i, il secondo per Δy_i, ed il terzo per Δz_i, si ha

$$\begin{aligned} &= \frac{v_x\left(x_i+\Delta x_i, y_i, z_i\right)-v_x\left(x_i, y_i, z_i\right)}{\Delta x_i} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i + \\ &+ \frac{v_y\left(x_i, y_i+\Delta y_i, z_i\right)-v_y\left(x_i, y_i, z_i\right)}{\Delta y_i} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i + \\ &+ \frac{v_z\left(x_i, y_i, z_i+\Delta z_i\right)-v_z\left(x_i, y_i, z_i\right)}{\Delta z_i} \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i \end{aligned}$$

e per la definizione di derivata parziale

$$\simeq\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i=\operatorname{div} \mathbf{v} \Delta V_i \simeq \int\limits_{V_i} \operatorname{div} \mathbf{v} d V$$

e questo completa la dimostrazione del teorema della divergenza per un cubetto infinitesimo.

Se ora sommiamo su tutti i cubetti abbiamo

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_{\partial V_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d S=\sum_{i=1}^n \int\limits_{V_i} \operatorname{div} \mathbf{v} d V$$

ed il secondo membro è proprio, per le proprietà degli integrali, l'integrale della divergenza su tutto il dominio, ovvero

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_{V_i} \operatorname{div} \mathbf{v} d V=\int\limits_V \operatorname{div} \mathbf{v} d V$$

Nell'altra somma invece, possiamo osservare che ogni termine relativo ad una faccia di un cubetto, ha un corrispondente termine relativo alla faccia del cubetto adiacente avente con il primo quella faccia un comune. Sia per esempio in comune tra il cubetto i-esimo e il successivo la faccia ortogonale all'asse x, la somma dei termini relativi a queste due facce sovrapposte è data da

$$\mathbf{v}\left(x_i+\Delta x_i, y_i, z_i\right) \cdot(+\mathbf{i}) \Delta y_i \Delta z_i+\mathbf{v}\left(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}\right) \cdot(-\mathbf{i}) \Delta y_{i+1} \Delta z_{i+1}$$

ed essendo

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i+\Delta x_i \\ y_{i+1} &= y_i \\ z_{i+1} &= z_i \\ \Delta y_{i+1} &= \Delta y_i \\ \Delta z_{i+1} &= \Delta z_i \end{aligned}$$

si ha che i due termini di cancellano reciprocamente. Questo avviene per tutte le facce; gli unici termini che non si annullano sono quelli relativi alle facce esterne, che dànno quindi l'integrale di superficie desiderato. Questo completa la dimostrazione.

Sul teorema della divergenza vogliamo fare un paio di osservazioni.

La prima riguarda il fatto che un modo suggestivo di scrivere il teorema della divergenza è il seguente

$$\int_{\partial V} n_i v_i dS = \int_V \partial_i v_i dV$$

dove si ha la regola mnemonica che passando da un integrale di superficie (chiusa) a un integrale di volume si ha la trasformazione $n_i \to \partial_i$.

In particolare, per un campo tensoriale $\mathbf{T}$ si ha

$$\int_{\partial V} \mathbf{Tn} dS = \int_{\partial V} \mathbf{e}_i T_{ij} n_j dS = \int_V \mathbf{e}_i \partial_j T_{ij} dV = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T} dV.$$

La seconda riguarda il fatto che l'integrale della divergenza può anche essere usato per la definizione stessa di divergenza:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

4 Teorema di Stokes

Un altro teorema fondamentale dell'analisi vettoriale è il *Teorema di Stokes*, che dato un campo vettoriale $\mathbf{v}$ e data una superficie non chiusa, lega l'integrale curvilineo (integrale di linea) del campo sul bordo della superficie al flusso del rotore del campo attraverso la superficie, ovvero

$$\int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot dP = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

Per la dimostrazione ricorriamo alla suddivisione della superficie in un gran numero di piccoli rettangoli S_i, ognuno dei quali sia sufficientemente piccolo da poter essere considerato piano. Dimostriamo il teorema per un singolo rettangolo, che possiamo supporre giacere nel piano xy e con i lati paralleli agli assi. Per il secondo membro si ha

$$\int_{S_i} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \simeq \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \Delta S = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Delta x_i \Delta y_i$$

mentre per il primo membro, scomponendo per i quattro lati del rettangolo

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial S_i} \mathbf{v} \cdot dP \simeq\ & \mathbf{v}\left(x_i, y_i, z_i\right) \cdot (+\mathbf{i})\, \Delta x_i + \mathbf{v}\left(x_i + \Delta x_i, y_i, z_i\right) \cdot (+\mathbf{j})\, \Delta y_i + \\
& \mathbf{v}\left(x_i, y_i + \Delta y_i, z_i\right) \cdot (-\mathbf{i})\, \Delta x_i + \mathbf{v}\left(x_i, y_i, z_i\right) \cdot (-\mathbf{j})\, \Delta y_i \\
=\ & +v_x\left(x_i, y_i, z_i\right) \Delta x_i + v_y\left(x_i + \Delta x_i, y_i, z_i\right) \Delta y_i \\
& -v_x\left(x_i, y_i + \Delta y_i, z_i\right) \Delta x_i - v_y\left(x_i, y_i, z_i\right) \Delta y_i \\
=\ & \left(v_x\left(x_i, y_i, z_i\right) - v_x\left(x_i, y_i + \Delta y_i, z_i\right)\right) \Delta x_i + \\
& \left(v_y\left(x_i + \Delta x_i, y_i, z_i\right) - v_y\left(x_i, y_i, z_i\right)\right) \Delta y_i
\end{aligned}$$

ora, dividendo e moltiplicando il primo termine per Δy_i, ed il secondo per Δy_i si ha

$$\begin{aligned}
=\ & -\frac{v_x\left(x_i, y_i + \Delta y_i, z_i\right) - v_x\left(x_i, y_i, z_i\right)}{\Delta y_i} \Delta x_i \Delta y_i + \\
& \frac{v_y\left(x_i + \Delta x_i, y_i, z_i\right) - v_y\left(x_i, y_i, z_i\right)}{\Delta x_i} \Delta x_i \Delta y_i
\end{aligned}$$

e per la definizione di derivata parziale

$$= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \Delta x_i \Delta y_i$$

come si era ottenuto per il primo membro, e questo completa la dimostrazione per il singolo rettangolino.

Sommiamo ora su tutti i rettangolini. Di conseguenza la somma di tutti gli integrali di superficie ci dà, per le proprietà degli integrali, l'integrale sull'intera superficie. La somma degli integrali di linea, invece, dà contributi che si elidono per ogni lato in comune tra due rettangolini (e precorso in verso opposto), e restano quindi soltanto i contributi relativi ai lati non in comune, che forniscono un'approssimazione della curva ∂S.