Esercizio 2 della prova scritta del 06/12/2013 12CFU

Il sistema ha un grado di libertà. L'unico corpo rigido che costituisce il sistema materiale si muove di moto traslatorio rettilineo nella direzione della retta r di equazione $y = x$. Per determinare univocamente la posizione del sistema è sufficiente conoscere come unica coordinata lagrangiana una qualunque coordinata di un qualunque suo punto, per semplicità scegliamo l'ascissa del punto A e chiamiamola x. Dato che questo punto è inizialmente sulla retta r ed è vincolato a scorrere su di essa, per soddisfare l'equazione della retta avrà l'ordinata uguale all'ascissa, quindi $A = (x, x)$. Le coordinate degli altri punti si possono facilmente determinare in funzione di x tenendo conto che il moto è traslatorio, quindi le differenze di ascisse e le differenze di ordinate di due dati punti del corpo rigido non cambiano durante il moto, così si ha:

$$\begin{aligned} B &= (x + 6a,\ x + 6a), \\ C &= (x,\ x + 9a), \\ G &= (x + 2a,\ x + 5a). \end{aligned}$$

Tenendo conto che

$$\mathbf{v}_G = \dot{x}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

l'energia cinetica del sistema è data da

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_G^2 = \frac{1}{2}(27\mu_0 a^2)(2\dot{x}^2) = 27\mu_0 a^2\dot{x}^2.$$

Il potenziale della forza peso è

$$U_P = -Mgy_G = -27\mu_0 a^2 g(x + 5a)$$

Tenendo conto che si ha

$$B - C = 6a\mathbf{e}_1 - 3a\mathbf{e}_2,$$

La forma cartesiana della forza $\mathbf{F}_\lambda$ è

$$\mathbf{F}_\lambda = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6a & -3a & 0 \end{vmatrix} = \lambda(3a\mathbf{e}_1 + 6a\mathbf{e}_2) = 3\lambda a(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2),$$

e il suo potenziale, tenendo conto che è una forza costante applicata in B, è

$$U_\lambda = 3\lambda a(x_B + 2y_B) = 3\lambda a[x + 6a + 2(x + 6a)] = 9\lambda a(x + 6a).$$

Per quanto riguarda la forza $\mathbf{F}_k$, essendo una forza elastica, possiamo scriverne direttamente il potenziale

$$U_k = -\frac{1}{2}k(C - D)^2 = -\frac{1}{2}k[x^2 + (x - 9a)^2] = -\frac{1}{2}k(2x^2 - 18ax + 81a^2).$$

Infine il potenziale centrifugo è dato da

$$\begin{aligned} U_c &= \frac{1}{2}I_y\Omega^2 = \frac{1}{2}(I_y^{(G)} + Mx_G^2)\Omega^2 = \frac{1}{2}[54\mu_0 a^4 + 27\mu_0 a^2(x + 2a)^2]\Omega^2 \\ &= \frac{27}{2}\mu_0 a^2\Omega^2(x^2 + 4ax + 6a^2). \end{aligned}$$

Il potenziale è quindi

$$
\begin{aligned}
U &= U_P + U_\lambda + U_k + U_c \\
&= -27\mu_0 a^2 g(x+5a) + 9\lambda a(x+6a) - \frac{1}{2}k(2x^2 - 18ax + 81a^2) + \frac{27}{2}\mu_0 a^2\Omega^2(x^2+4ax+6a^2) \\
&= \frac{1}{2}(27\mu_0 a^2\Omega^2 - 2k)x^2 + 9a(6\mu_0 a^2\Omega^2 + k + \lambda - 3\mu_0 ag)x + U_0
\end{aligned}
$$

dove U_0 è una costante additiva inessenziale, quindi la lagrangiana è

$$
\mathscr{L} = T + U = 27\mu_0 a^2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(27\mu_0 a^2\Omega^2 - 2k)x^2 + 9a(6\mu_0 a^2\Omega^2 + k + \lambda - 3\mu_0 ag)x + U_0.
$$

Per scrivere le equazioni di Lagrange ci servono le seguenti derivate

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x} &= (27\mu_0 a^2\Omega^2 - 2k)x + 9a(6\mu_0 a^2\Omega^2 + k + \lambda - 3\mu_0 ag), \\
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}} &= 54\mu_0 a^2\dot{x}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}} &= 54\mu_0 a^2\ddot{x},
\end{aligned}
$$

quindi l'unica equazione di Lagrange del sistema si scrive

$$
54\mu_0 a^2\ddot{x} - (27\mu_0 a^2\Omega^2 - 2k)x - 9a(6\mu_0 a^2\Omega^2 + k + \lambda - 3\mu_0 ag) = 0.
$$

Le posizioni di equilibrio si ottengono dalla condizione

$$
Q_x = \frac{\partial U}{\partial x} = (27\mu_0 a^2\Omega^2 - 2k)x + 9a(6\mu_0 a^2\Omega^2 + k + \lambda - 3\mu_0 ag) = 0,
$$

quindi possiamo dire che se $27\mu_0 a^2\Omega^2 - 2k \neq 0$ abbiamo un'unica posizione di equilibrio data da

$$
x_0 = -\frac{9a(6\mu_0 a^2\Omega^2 + k + \lambda - 3\mu_0 ag)}{27\mu_0 a^2\Omega^2 - 2k},
$$

se invece $27\mu_0 a^2\Omega^2 - 2k = 0$ e $6\mu_0 a^2\Omega^2 + k + \lambda - 3\mu_0 ag \neq 0$, allora non ci sono posizioni di equilibrio. Infine, se $27\mu_0 a^2\Omega^2 - 2k = 0$ e $6\mu_0 a^2\Omega^2 + k + \lambda - 3\mu_0 ag = 0$ allora tutte le posizioni sono di equilibrio.

La stabilità è data dal segno della derivata seconda del potenziale

$$
\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 27\mu_0 a^2\Omega^2 - 2k,
$$

se questa quantità è positiva, allora la posizione di equilibrio x_0 è instabile, se invece è negativa allora è stabile. Il caso in cui tutte le posizioni sono di equilibrio, questo equilibrio è indifferente.