

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Prova scritta - Fuori Corso - di Matematica II
25 Novembre 2011

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU risolvano i quesiti numero 3-4-5-6-7-8-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (con geometria) risolvano i quesiti numero
1-2-4-5-9

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (senza geometria) risolvano i quesiti numero
4-5-7-9

1. Dati i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4

$$V = \{(2a - b + c, a - c, -a + 2b, -3b + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(x, y, z, t) \mid x + y - z + t = x - 2y + z = 0\}$$

- (a) calcolare la dimensione e una base di $V + W$;
- (b) calcolare una rappresentazione cartesiana di V .

2. Data l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 , la cui matrice rappresentativa è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

- (a) calcolare la dimensione e una base di $\ker f$;
- (b) calcolare la dimensione e una base ortonormale di $\operatorname{Im} f$;
- (c) dire se f è diagonalizzabile su \mathbb{R} e su \mathbb{C} .

3. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)} - 1}{\frac{1}{n}} \right)^n.$$

4. Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo relativo della funzione $f(x, y) = \frac{64}{x} + \frac{x}{y} + y$ nella regione $x > 0, y > 0$.

5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

a. $y''' + 8y = 2 \cos \frac{5}{2}x \sin \frac{1}{2}x$

b.
$$\begin{cases} y' - 3y = 3y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

6. Determinare il valore dell'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} (x + y^2)(dx + dy)$$

dove γ è l'arco di circonferenza con centro nell'origine O e raggio 1 nel 1° quadrante, orientato in verso antiorario.

7. Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = (y^2 + \tan^2 x + 1) dx + 2xy dy,$$

studiarne il dominio, la chiusura, l'esattezza e determinare l'eventuale primitiva. Calcolarne poi l'integrale curvilineo lungo l'arco di circonferenza con centro nell'origine e raggio $\pi/4$ nel semipiano $y \geq 0$ fra i punti di intersezione con l'asse x .

8. Calcolare l'area della seguente superficie S di equazioni

$$\begin{cases} x = u^2 \\ y = v^2 \\ z = \sqrt{2}uv \end{cases} \quad u^2 + v^2 \leq 4, \quad uv \geq 0$$

9. Calcolare l'area della figura limitata dalle curve $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ ed $y = 0$.
10. (Facoltativo) Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della seguente serie di potenza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n^2 + 2)5^n}$$