UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Prova scritta - Fuori Corso - di Matematica II
26 Ottobre 2011

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU risolvano i quesiti numero 3-4-5-6-7-8-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (con geometria) risolvano i quesiti numero 1-2-4-5-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (senza geometria) risolvano i quesiti numero 4-5-7-9

1. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$V = \{(-2a+1, b-a, -3a, -2b)\,|a, b \in \mathbb{R}\}\,,\ W = \{(x, y, z, t)\,|2x + 2y + t = 0\}$$

   (a) calcolare la dimensione e una base di $V + W$;
   (b) calcolare una rappresentazione cartesiana di V.
   (c) stabilire se $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$

2. Data l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, la cui matrice rappresentativa è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   (a) calcolare la dimensione e una base di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$;
   (b) dire se f è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.
   (c) Determinare una base di autovettori per $\mathbb{R}^3$.

3. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(5n+1)!}.$$

4. Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi della funzione:

$$f(x, y) = x^3 - x^2 y + y^2 - x^2 + 1$$

   nonchè i valori ivi assunti dalla funzione.

5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali

   a. $$y''' - 125y = e^{5x}(\cos x)$$

   b. $$\begin{cases} y'x + 3y = xe^x \\ y(1) = -2e \end{cases}$$

6. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\oint_{\gamma} [(x+y)dx + (y-x)dy]$$

dove γ è la circonferenza (antioraria) di centro $O \equiv (0,0)$ e raggio 2.

7. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = 6x^2y^2z\mathbf{i} + (4x^3yz + 2z)\mathbf{j} + (2x^3y^2 + 2y)\mathbf{k}$$

e l'arco di curva

$$\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \quad t \in [0,2] \\ z = t^3 \end{cases}$$

(a) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo Γ usando la definizione, attraverso l'integrale.

(b) Verificare che il campo $\mathbf{F}$ e' irrotazionale in tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$ e se ne deduca che e' conservativo.

(c) Si determini un potenziale $V(x,y,z)$ di $\mathbf{F}$ in $\mathbb{R}^3$.

(d) Si calcoli il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo l'arco di curva Γ' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t(5-t^2) \\ y = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad t \in [0,2] \\ z = t(8-2t) \end{cases}$$

usando il potenziale calcolato al punto precedente.

8. Calcolare il seguente integrale superficiale

$$\int_S \sqrt{(x+y)^2 + 4(z+1)}d\sigma$$

dove S è la superficie S di equazioni

$$\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \quad 1 \leq u^2+v^2 \leq 9, \quad u \leq 0 \;\;, v \geq 0 \\ z = u^2 \end{cases}$$

9. Sia D il dominio delimitato dalla curva $y = \sqrt{x}$, la retta $y = 1$ e l'asse delle ordinate.
Si calcoli

$$\int\int_D \cos(y^3)dxdy.$$

10. (Facoltativo) Si calcoli la divergenza del campo $\mathbf{F}$ dell'esercizio 7 , i. e. $div\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$, e si dica se esiste un aperto di $\mathbb{R}^3$ in cui il campo e' solenoidale, cioe' a divergenza nulla.