UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Svolgimento della prova scritta - fuori corso - di Matematica II
14 Ottobre 2010

Esercizio n. 1

XXXXXXXXXXXXXXXXX
Esercizio n. 2

XXXXXXXXXXXXXXXXX
Esercizio n. 3
Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+4}(4n+5)}{n^2+3}.$$

Svolgimento
Poiché si tratta comunque di una serie a termini positivi essendo il termine $(-1)^{2n+4}$ sempre 1 per ogni valore di n, utilizzando il criterio del confronto si può concludere che essa é divergente allo stesso modo della serie armonica.

Esercizio n. 4
Determinare gli eventuali punti critici della funzione

$$f(x,y) = (x-1)^2 e^{x(y^3-1)}$$

e discuterne la natura.
Svolgimento
I punti critici si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{x(y^3-1)}[2(x-1) + (x-1)^2(y^3-1)] = 0, \\ \\ f_y(x,y) = e^{x(y^3-1)}(x-1)^2 x(3y^2) = 0. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (x-1)[2 + (x-1)(y^3-1)] = 0, \quad y^2x(x-1)^2 = 0. \\ \\ y^2x(x-1)^2 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono date da

1. • $x = 1$, costituita da punti di minimo assoluto, dal momento che la funzione é non negativa e sulla retta $x = 1$ si annulla.

- $A = (0, \sqrt[3]{3})$, $B = (3, 0)$

  Per determinare la natura dei punti A e B vanno calcolate le derivate seconde, ottenendo

  $$f_{xx}(x,y) = e^{x(y^3-1)}[2 + 4(x-1)(y^3-1) + (x-1)^2(y^3-1)^2], \qquad f_{xy}(x,y) = e^{x(y^3-1)}[2(x-1)$$

  $$f_{xy}(x,y) = e^{x(y^3-1)}[2(x-1)x3y^2 + 3y^2(x-1)^2 + (x-1)^2x3y^2(y^3-1)], \quad f_{yy}(x,y) = (x-1)^2xe^{x(y^3-1)}$$

  $$f_{yy}(x,y) = (x-1)^2xe^{x(y^3-1)}[6y + 9y^4x]$$

  La matrice hessiana nei punti A e B é data da

  $$H_f(A) = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

  $$H_f(B) = \begin{bmatrix} e^{-3}(-2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Il punto A é di sella, per il punto B non si puó dire nulla guardando solo la matrice hessiana, il cui determinante é nullo.

Esercizio n.5

a) $\begin{cases} y' + \frac{2}{3}y = \frac{e^{-x}\sin x}{\sqrt{y}} \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$

b) $y''' - 27y = \dfrac{ie^{i4x}}{2} - i(\cos^2 2x - \frac{1}{2})$

Svolgimento:

a) E' un'equazione di Bernoulli che si può riscrivere nella forma

$$y'\sqrt{y} + \frac{2}{3}y\sqrt{y} = e^{-x}\sin x.$$

Poniamo

1. $$y^{\frac{3}{2}} = z$$

   allora

   $$z' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}y'$$

   sostituendo

   $$\frac{2}{3}z' + \frac{2}{3}z = e^{-x}\sin x$$

   $$z' + z = \frac{3}{2}e^{-x}\sin x$$

E' un'equazione lineare del primo ordine la cui soluzione è

$$z(x) = e^{-\int dx} \left[\int e^{\int dx} \frac{3}{2} e^{-x} \sin x dx + c \right]$$

$$z(x) = e^{-x} \left[\int \frac{3}{2} e^{x} e^{-x} \sin x dx + c \right]$$

$$z(x) = e^{-x} \left[-\frac{3}{2} \cos x + c \right]$$

$$z(x) = ce^{-x} - \frac{3}{2} e^{-x} \cos x$$

Ritornando alla funzione $y(x)$

$$y(x) = \left[ce^{-x} - \frac{3}{2} e^{-x} \cos x \right]^{\frac{2}{3}}$$

e imponendo la condizione iniziale

$$\left[ce^{-\frac{\pi}{2}} \right]^{\frac{2}{3}} = 1 \qquad \rightarrow c = e^{\frac{\pi}{2}}$$

la soluzione è

$$y(x) = \left[e^{-x+\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{2} e^{-x} \cos x \right]^{\frac{2}{3}}$$

b) Calcoliamo la soluzione della equazione omogenea associata $y''' - 27y = 0$, il cui polinomio caratteristiche ammette le seguenti radici:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 27 &= 0 \Rightarrow (\lambda - 3)\left(\lambda^2 + 3\lambda + 9\right) = 0 \\ &\Downarrow \\ \lambda_1 &= 3, \; \lambda_{2,3} = \frac{3}{2} i\sqrt{3} \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$

da cui

$$y_o(x) = C_1 e^{3x} + e^{-\frac{3}{2}x} \left(C_2 \cos \frac{3}{2}\sqrt{3}x - C_3 \sin \frac{3}{2}\sqrt{3}x \right).$$

A questo punto conviene semplificare l'espressione della equazione assegnata

$$\begin{aligned} y''' - 27y &= \frac{ie^{i4x}}{2} - i(\cos^2 2x - \frac{1}{2}) \\ &\Downarrow \\ y''' - 27y &= \frac{i(\cos 4x + i \sin 4x)}{2} - \frac{1}{2} i \cos 4x \\ &\Downarrow \\ y''' - 27y &= -\frac{1}{2} \sin 4x, \end{aligned}$$

di conseguenza la particolare risulta del tipo

$$y_p(x) = A\cos 4x + B\sin 4x$$

le cui derivate risultano

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -4A\sin 4x + 4B\cos 4x \\ y_p''(x) &= -16A\cos 4x - 16B\sin 4x \\ y_p'''(x) &= 64A\sin 4x - 64B\cos 4x \end{aligned}$$

che sostituite nell'espressione della equazione assegnata otteniamo:

$$\begin{aligned} 64A\sin 4x - 64B\cos 4x - 27(A\cos 4x + B\sin 4x) &= -\frac{1}{2}\sin 4x \\ &\Downarrow \\ \sin 4x(64A - 27B) + \cos 4x(-64B - 27A) &= -\frac{1}{2}\sin 4x \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{cases} 64A - 27B = -\frac{1}{2} \\ -64B - 27A = 0 \end{cases}$$

le costanti risultano: $A = -\frac{32}{4825}$ e $B = \frac{27}{9650}$, che sostituite nell'espressione della soluzione particolare, ne risulta l'integrale generale seguente:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + e^{-\frac{3}{2}x}\left(C_2\cos\frac{3}{2}\sqrt{3}x - C_3\sin\frac{3}{2}\sqrt{3}x\right) - \frac{32}{4825}\cos 4x + \frac{27}{9650}\sin 4x.$$

Esercizio n. 6
Determinare il valore dell'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x^3}{(y+1)^2}\,ds$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 2t^{-1} \\ y(t) = 3t - 1 \end{cases} \qquad t \in [1,2].$$

Svolgimento
A partire dalla parametrizzazione della curva, ricaviamo

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = -2t^{-2} \\ y'(t) = 3 \end{cases}$$

da cui

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9 + \frac{4}{t^4}}\,, \quad ds = \sqrt{9 + \frac{4}{t^4}}\,dt.$$

L'integrale curvilineo dunque risulta:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{x^3}{(y+1)^2}ds &= \frac{8}{9}\int_1^2 \sqrt{4t^{-4}+9}\,t^{-5}\,dt = \frac{8}{9}(-\frac{1}{16})\int_{13}^{37/4}\sqrt{z}dz = \\ &= -\frac{1}{27}\left[\left(\frac{37}{4}\right)^{3/2} - 13^{3/2}\right]\end{aligned}$$

tramite la sostituzione

$$z = 9 + 4t^{-4}.$$

Esercizio n. 7:
Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = (\sin x + y)dx + (\sin y + x)dy,$$

studiarne il dominio, la chiusura, l'esattezza e determinarne l' eventuale primitiva. Calcolarne poi l'integrale curvilineo lungo l'arco di sinusoide fra l'origine e il punto di ascissa π

Svolgimento:

Poichè $\frac{\partial}{\partial y}(\sin x + y) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin y + x) = 1$, la forma risulta chiusa in R^2 quindi esatta. La primitiva è

$$f(x,y) = -\cos x - \cos y + xy + c$$

e l'integrale curvilineo vale

$$\int_\gamma \omega = f(\pi,0) - f(0,0) = -\cos\pi - \cos 0 + \cos 0 + \cos 0 = 2.$$

Esercizio n. 8

Calcolare il flusso del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (3x+2y)\overrightarrow{i} + (4z)\overrightarrow{j} + (x-y)\overrightarrow{k}$ attraverso la superficie cilindrica S di equazioni

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \qquad 0 \le u \le 2\pi \quad , \quad -1 < v < 1 \\ z = v \end{cases}$$

Svolgimento

$$Flusso = \int_S \left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n}\right) d\sigma$$

La normale alla superficie è $\overrightarrow{n} = (\cos u, \sin u, 0)$

$$Flusso = \int\int_D \left((3\cos u + 2\sin u)\cos u + 4v\sin u\right) dudv$$

dove $D = \{(u,v) \in R^2 : 0 \le u \le 2\pi \;\;,\;\; -1 < v < 1\}$

$$Flusso = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(3\cos^2 u + 2\sin u\cos u + 4v\sin u\right)dudv =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} 3\cos^2 ududv = 6\left[\frac{\cos u\sin u + u}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi$$

(il secondo e il terzo integrale sono nulli)

Esercizio n. 9

Calcolare il seguente integrale

$$\int_D \frac{2^y}{\sqrt{2x-x^2}}dxdy,$$

dove D è il dominio delimiato dalla retta $y=0$, dalla curva di equazione $y=\log_2 x$ e dalla retta di equazione $y=-3$.

Svolgimento:

Innanzitutto rappresentiamo graficamente il dominio, che risulta:

di conseguenza, trattandosi di un dominio normale rispetto ad y otteniamo: $D = \{(x,y) : -3 \le y \le 0,\ 0 \le x \le 2^y\}$, si ha

$$\begin{aligned}
\int\int_D \frac{2^y}{\sqrt{2x-x^2}}dxdy &= \int_{-3}^{0} 2^y dy \int_0^{2^y}\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \\
&= \int_{-3}^{0} 2^y\left(\frac{1}{2}\pi - \arcsin\left(1-2^y\right)\right)dy \\
&= \int_{-3}^{0} 2^y\frac{1}{2}\pi dy - \int_{-3}^{0} 2^y\arcsin\left(1-2^y\right)dy \\
&= \frac{7}{16}\frac{\pi}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}\left(1 - \frac{1}{8}\sqrt{15} - \frac{7}{8}\arcsin\frac{7}{8}\right)
\end{aligned}$$

in particolare l'integrale $\int_{-3}^{0} 2^y\arcsin\left(1-2^y\right)dy$ si risolve come segue:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{0} 2^y\arcsin\left(1-2^y\right)dy &= (\text{ponendo } t = 1-2^y) = -\frac{1}{\ln 2}\int_{7/8}^{0}\arcsin t\,dt \\
&= -\frac{1}{\ln 2}\left(1 - \frac{1}{8}\sqrt{15} - \frac{7}{8}\arcsin\frac{7}{8}\right).
\end{aligned}$$

Esercizio n.10

Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^8$$

nel punto $P(1,1)$ e lungo la direzione della retta $y=2x$ nel verso delle ascisse positive.

Svolgimento
Essendo la funzione differenziabile risulta che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v}.$$

La direzione $\mathbf{v}$ richiesta risulta quella del versore $\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$, mentre il gradiente nel punto assegnato è pari a

$$\nabla f(x, y) = (16x\left(x^2 + y^2\right)^7, 16y\left(x^2 + y^2\right)^7) \Rightarrow \nabla f(1, 1) = (2048, 2048);$$

da cui segue che

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 2) = (2048, 2048) \cdot \left(\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}\right) = 2048\frac{1}{5}\sqrt{5} + 2048\frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{20\,483}{5}\sqrt{5}.$$