UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Prova scritta di Matematica II
16 Settembre 2011

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU risolvano i quesiti numero 3-4-5-6-7-8-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (con geometria) risolvano i quesiti numero 1-2-4-5-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (senza geometria) risolvano i quesiti numero 4-5-7-9

1. Dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$V = \{(-a, a+b, -a+2b, -2b)\,|a, b \in \mathbb{R}\}\,,\ W = \{(x, y, z, t)\,|2x + y + t = 0\}$$

   (a) calcolare una rappresentazione cartesiana di V.
   (b) calcolare la dimensione e una base di $V + W$;

2. Data l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, la cui matrice rappresentativa è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

   (a) calcolare la dimensione e una base di $\ker f$;
   (b) calcolare la dimensione e una base ortonormale di $\operatorname{Im} f$;
   (c) dire se f è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

3. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+4}(4n+5)}{n^2+3}.$$

4. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi e assoluti della seguente funzione

$$f(x, y) = (x-1)^2 e^{x(y^3-1)}$$

   nel suo insieme di definizione.

5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali

a. $$y''' - 27y = \frac{ie^{i4x}}{2} - i(\cos^2 2x - \tfrac{1}{2})$$

b. $$\begin{cases} y' + \frac{2}{3}y = \dfrac{e^{-x}\sin x}{\sqrt{y}} \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

6. Determinare il valore dell'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x^3}{(y+1)^2} ds$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 2t^{-1} \\ y(t) = 3t - 1 \end{cases} \qquad t \in [1, 2].$$

7. Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = (\sin x + y)dx + (\sin y + x)dy,$$

studiarne il dominio, la chiusura, l'esattezza e determinarne l'eventuale primitiva. Calcolarne poi l'integrale curvilineo lungo l'arco di sinusoide fra l'origine e il punto di ascissa π

8. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3x + 2y)\ \overrightarrow{i} + (4z)\ \overrightarrow{j} + (x - y)\ \overrightarrow{k}$ attraverso la superficie cilindrica S di equazioni

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad , \quad -1 < v < 1$$

9. Calcolare il seguente integrale

$$\int_D \frac{2^y}{\sqrt{2x - x^2}} dxdy,$$

dove D è il dominio delimiato dalla retta $y = 0$, dalla curva di equazione $y = \log_2 x$ e dalla retta di equazione $y = -3$.

10. (Facoltativo) Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^8$$

nel punto $P(1, 1)$ e lungo la direzione della retta $y = 2x$ nel verso delle ascisse positive.