UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Prova scritta di Matematica II
06 Luglio 2011

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU risolvano i quesiti numero 3-4-5-6-7-8-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (con geometria) risolvano i quesiti numero 1-2-4-5-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (senza geometria) risolvano i quesiti numero 4-5-7-9

1. Classificare la seguente conica
$$hx^2 + y^2 - 2hxy + 4hy = 0$$
al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$.

Svolgimento
Scriviamo la matrice associata alla conica
$$A' = \begin{pmatrix} h & -h & 0 \\ -h & 1 & 2h \\ 0 & 2h & 0 \end{pmatrix}$$
e la matrice associata alla forma quadratica
$$A = \begin{pmatrix} h & -h \\ -h & 1 \end{pmatrix}$$
Calcoliamo i determinanti delle due matrici:
$$\begin{aligned} \det A' &= -4h^3 \\ \det A &= h - h^2 \end{aligned}$$
Si ha che la conica è non degenere per $\det A' \neq 0$ cioè per $h \neq 0$.

- Per $h = 0$ la conica è degenere e, dato che $\det A = 0$, si tratta di una coppia di rette parallele. Resta da controllare la somma
$$A_{11} + A_{22} \text{ (per } h = 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
quindi le rette sono parallele coincidenti.

- Per $h \neq 0$ la conica è non degenere e varia a seconda del segno di $\det A$. Abbiamo:

– $\det A = 0$ per $h - h^2 = 0$ cioè per $h = 0$ e $h = 1$: il primo di questi valori è da scartare perché azzera anche $\det A'$, mentre per il secondo valore
di h la conica γ è una parabola;
– $\det A < 0$ per $h - h^2 < 0$ cioè per $h < 0$ e $h > 1$: per questi valori di h la conica γ è una iperbole;
– $\det A > 0$ per $h - h^2 > 0$ cioè per $0 < h < 1$: per questi valori di h la conica γ è una ellisse; in questo caso dobbiamo fare un'ulteriore indagine

studiando il segno di

$$trA \det A' = (h+1)\left(-4h^3\right)$$

Studiamo il segno del prodotto appena scritto: osserviamo che per $0 < h < 1$, h^3 è positivo e quindi $-4h^3 < 0$, mentre il termine $h+1$ è positivo

per $h > -1$, pertanto $trA \det A' < 0$ nel caso in esame e perciò la conica γ è una ellisse reale.

2. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$W = \{(x, y, z, t) \ \in R^4 | x + y + z - t = 0\}$$

e

$$V = \langle (1, 0, 0, 0), (0, -2, 1, 1) \rangle$$

   (a) Calcolare la dimensione e una base di $V \cap W$.
   (b) Calcolare la dimensione e una base di $V + W$.

Svolgimento

a) Osservando che i generatori dati per V sono linearmente indipendenti, in quanto non proporzionali tra loro, si ha che

$$v \in V \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} : v = a\ (1, 0, 0, 0) + b\ (0, -2, 1, 1)$$

ossia

$$V = \{(a, -2b, b, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

I vettori dello spazio $V \cap W$ sono sia vettori di V che di W, quindi sostituendo la rappresentazione parametrica dei vettori di V nel sistema rappresentativo di W, si ricavano (se esistono) i valori dei parametri a, b per i quali $(a, -2b, b, b)$ appartiene a W, cioè $|x + 2y - z + t = x + y + z - t = 0$

$$a - 2b + b - b = 0 \Longrightarrow a = 2b.$$

Dunque

$$V \cap W = \{(2b, -2b, b, b) : b \in \mathbb{R}\}$$

e quindi si ha

$$B_{V \cap W} = \{(2, -2, 1, 1)\} \quad \text{e} \quad \dim (V \cap W) = 1.$$

b) La dimensione dello spazio somma $V + W$ è data dalla relazione di Grassman

$$\dim V + W = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$$

dove $\dim V = 2$, $\dim V \cap W = 1$. Rimane da calcolare $\dim W$ di cui è stato assegnato il sistema rappresentativo di 1 equazione, quindi la matrice incompleta dei coefficienti del sistema ha rango uguale a 1 e $\dim W = 4 - 1 = 3$.Si ha pertanto:

$$\dim V + W = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Poiché $V + W \subset \mathbb{R}^4$ e $\dim V + W = \dim \mathbb{R}^4$, quindi possiamo dare come base di $V + W$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

3. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{-n}\right)^n .$$

Svolgimento

Verifichiamo la condizione necessaria per la convergenza:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{e^n}\right)^n &= (\text{posto } m=e^n) = \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\log m} \\
&= (\text{moltiplichiamo e dividiamo per } m) = \lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m\frac{\log m}{m}} = e^{\frac{\log m}{m}} \\
&= e^0 = 1
\end{aligned}$$

da cui la serie non converge.

4. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi e assoluti della seguente funzione

$$F(x,y)=\sin x\cos\left(x+y\right)$$

nel suo insieme di definizione.

Svolgimento

Osserviamo che la funzione è definita in R^2 e che $-1\le F\left(x,y\right)\le 1$.
Calcoliamo i punti critici della funzione

$$\begin{cases} F_x=\cos x\cos\left(x+y\right)-\sin x\sin\left(x+y\right)=0 \\ F_y=-\sin x\sin\left(x+y\right)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x=0 \\ \cos x\cos\left(x+y\right)=0 \end{cases} \cup \begin{cases} \sin\left(x+y\right)=0 \\ \cos x\cos\left(x+y\right)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x=0 \\ \cos\left(x+y\right)=0 \end{cases} \cup \begin{cases} \sin\left(x+y\right)=0 \\ \cos x=0 \end{cases}$$

(Gli altri sistemi non hanno soluzione)
I punti critici sono

$$A_{h,k}=\left(h\pi,\frac{\pi}{2}+\left(k-h\right)\pi\right)\qquad B_{h',k'}=\left(\frac{\pi}{2}+h'\pi,-\frac{\pi}{2}+\left(k'-h'\right)\pi\right)\qquad h,k,h',k'\in Z$$

Calcoliamo le derivate del secondo ordine:

$$\begin{aligned}
F_{xx}&=-2\sin x\cos\left(x+y\right)-2\cos x\sin\left(x+y\right) \\
F_{xy}&=-\cos x\sin\left(x+y\right)-\sin x\cos\left(x+y\right) \\
F_{yy}&=-\sin x\cos\left(x+y\right)
\end{aligned}$$

Quindi i punti $A_{h,k}$ sono punti di sella (essendo $\det H=-F_{xy}^2<0$); i punti $B_{h',k'}$ sono di massimo assoluto se h e k hanno la stessa parità e sono di minimo assoluto se hanno una parità diversa ($\det H = \sin^2 x \cos^2 (x+y) > 0$ e $F_{xx} = -2 \sin x \cos (x+y)$).

(si osserva che $F(B_{h',k'}) = (-1)^{h'+k'}$ e quindi assume i valori massimo e minimo assoluti rispettivamente).

5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali

$$\textbf{a.} \qquad y'' + 4y' = \frac{x}{e^x} \cosh x$$

$$\textbf{b.} \qquad y' = \frac{1+y^2}{\arctan y} - 2y'x^2 - y'x^4$$

Svolgimento

a) L'equazione può essere riscritta nella forma

$$y'' + 4y' = \frac{x}{2}(1 + e^{-2x})$$

Determiniamo la soluzione dell'equazione omogenea associata

$$\begin{aligned}
&y'' + 4y' = 0 \\
&\lambda^2 + 4\lambda = 0 \qquad \leftrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -4, \\
&y_0(x) = c_1 + c_2 e^{-4x} \qquad \text{(soluz. omogenea ass.)}
\end{aligned}$$

la soluzione particolare è del tipo:

$$y_p(x) = x(Ax + B) + (Cx + D)e^{-2x}$$

derivando e sostituendo nell'equazione si calcolano i coefficienti ottenendo

$$y_p(x) = x\left(\frac{1}{16}x - \frac{1}{32}\right) - \frac{x}{8}e^{-2x}$$

La soluzione dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-4x} + x\left(\frac{1}{16}x - \frac{1}{32}\right) - \frac{x}{8}e^{-2x}$$

b) L'equazione può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1+y^2}{\arctan y} - 2y'x^2 - y'x^4 \\
&\Downarrow \\
y' + 2y'x^2 + y'x^4 &= \frac{1+y^2}{\arctan y} \\
&\Downarrow \\
y'(1 + 2x^2 + x^4) &= \frac{1+y^2}{\arctan y} \\
&\Downarrow \\
y' \frac{\arctan y}{1+y^2} &= \frac{1}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

che rappresenta una equazione a variabili separabili, da cui:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan y}{1+y^2} dy &= \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \\
&\Downarrow \\
\frac{1}{2}\arctan^2 y &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} dx \\
&= \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx \\
&= \int \frac{1}{(1+x^2)} dx - \int \frac{x \cdot x}{(1+x^2)^2} dx \\
&= \text{(risolvendo il secondo integrale per parti otteniamo)} \\
&= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c
\end{aligned}$$

6. Determinare le coordinate del baricentro dell'arco di curva (*spirale logaritmica)* di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = a\,e^{-t}\cos t \,, \\ y(t) = a\,e^{-t}\sin t \,, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (a > 0). \end{cases}$$

Si ricordi che le coordinate del baricentro sono: $x_G = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x\, ds$, $y_G = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma y\, ds$, dove $L(\gamma) = \int_\gamma ds$.

Svolgimento

Le coordinate cartesiane del baricentro G sono date dalle formule

$$x_G = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x\, ds \,, \; y_G = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma y\, ds \,, \; L(\gamma) = \int_\gamma ds \,.$$

Nella fattispecie è

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \sqrt{2} a\, e^{-t} dt,$$

quindi si ha

$$L(\gamma) = \sqrt{2} a \int_0^{2\pi} e^{-t} dt = \sqrt{2} a \left(1 - e^{-2\pi}\right);$$

dopodichè, tenendo presenti gli integrali indefiniti (calcolati *per parti*):

$$\int e^{-2t}\cos t dt = e^{-2t}\left(\frac{1}{5}\sin t - \frac{2}{5}\cos t\right) + c$$
$$\int e^{-2t}\sin t dt = e^{-2t}\left(-\frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t\right) + c$$

si ottiene

$$x_G = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x\, ds = \frac{a}{1-e^{-2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-2t} \cos t dt = \frac{2}{5}(1+e^{-2\pi})a;$$

$$y_G = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma y\, ds = \frac{a}{1-e^{-2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-2t} \sin t dt = \frac{1}{5}(1+e^{-2\pi})a.$$

7. Data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy \qquad \begin{cases} f_1(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^4} \\ f_2(x,y) = 2y\dfrac{x^2-x+y^4}{x^2+y^4} \end{cases},$$

studiarne il dominio, la chiusura e l'esattezza, determinando una primitiva (se possibile). Calcolarne inoltre l'integrale curvilineo lungo la curva
$y^2 - x = 0$ fra i punti di ascissa 1 e 2 nel 1° quadrante (nell'ordine).
Svolgimento
Poichè $\partial f_1/\partial y = \partial f_2/\partial x$, la forma è chiusa nel suo dominio $D = R^2 - \{0,0\}$, quindi esatta in ogni componente semplicemente connessa di D. Dopodichè si ottiene:

$$\int f_1(x,y)dx = \arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) + c(y) = f(x,y),$$

imponendo successivamente l'eguaglianza

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2xy}{x^2+y^4} + c'(y) = f_2(x,y),$$

che implica infine $c'(y) = 2y \Longrightarrow c(y) = y^2$. La primitiva dunque è

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y^2}\right) + y^2 + c.$$

Visto l'arco di curva indicato (parabola con asse orizzontale e vertice nell'origine), l'integrale curvilineo si può calcolare brevemente come

$$\int_\gamma \omega = f(2,\sqrt{2}) - f(1,1) = \arctan\frac{2}{2} + 2 + c - \arctan\frac{1}{1} - 1 - c = 1.$$

8. Calcolare il seguente integrale superficiale

$$\int_S \frac{z^2}{x\sqrt{1+16x^2+16y^2}} d\sigma$$

dove S rappresenta la superficie del paraboloide $z = 2x^2 + 2y^2$ con (x,y) appartenenti al dominio D, incluso nel primo quadrante, delimitato dalle rette $y = 0$ e $y = x$ e dalle circonferenze centrate nell'origine di raggi 1 e 3.

Svolgimento

L'elemento di superficie diventa $d\sigma = \sqrt{(1+16u^2)(1+16v^2) - 256u^2v^2} = \sqrt{1+16u^2+16v^2}$. L'integrale diventa

$$\begin{aligned}\int\int_D \frac{4(u^2+v^2)^2}{u} dudv &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^3 \frac{4\rho^4}{\cos\theta} d\rho d\theta = \\ & \frac{968}{5}\left[\frac{1}{2}\ln(2\sin\theta+2) - \frac{1}{2}\ln(2-2\sin\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

9. Calcolare il seguente integrale
$$\int\int_D (-8x^2+2y^2)dxdy$$
dove D é il dominio delimitato dalle rette $-2x-y=1$, $-2x-y=5$, $4x-2y=3$, $4x-2y=1$.

Svolgimento:

Va fatta la sostituzione $u=-2x-y$ $v=4x-2y$. Il det jacobiano è $\frac{1}{8}$. E l'integrando diventa uv, da cui

$$\int\int_D (-8x^2+2y^2)dxdy = \int_1^5 \int_1^3 \frac{1}{8} uvdudv = 6.$$

10. (Facoltativo) Calcolare l'integrale
$$\int\int_S \sqrt{9+\frac{7}{9}z^2+27x^2} d\sigma,$$
dove S e' la superificie dell'ellissoide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$.

Svolgimento

In coordinate polari sull'ellissoide

$$x = 2\sin t\cos s, y = 4\sin t \sin s, z = 3\cos s$$

l'integrale diventa $\int_0^2 \pi \int_0^\pi 2sentdsdt$ di immediata risoluzione.