UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Prova scritta di Matematica II
06 Luglio 2011

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU risolvano i quesiti numero 3-4-5-6-7-8-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (con geometria) risolvano i quesiti numero 1-2-4-5-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (senza geometria) risolvano i quesiti numero 4-5-7-9

1. Classificare la seguente conica
$$hx^2 + y^2 - 2hxy + 4hy = 0$$
al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$.

2. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$
$$W = \{(x, y, z, t) \ \in R^4 | x + y + z - t = 0\}$$
e
$$V = \langle (1, 0, 0, 0), (0, -2, 1, 1) \rangle$$
   (a) Calcolare la dimensione e una base di $V \cap W$.
   (b) Calcolare la dimensione e una base di $V + W$.

3. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + e^{-n}\right)^n .$$

4. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi e assoluti della seguente funzione
$$F(x, y) = \sin x \cos (x + y)$$
nel suo insieme di definizione.

5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali
$$\textbf{a.} \qquad y'' + 4y' = \frac{x}{e^x} \cosh x$$
$$\textbf{b.} \qquad y' = \frac{1 + y^2}{\arctan y} - 2y'x^2 - y'x^4$$

6. Determinare le coordinate del baricentro dell'arco di curva (*spirale logaritmica)* di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = a\,e^{-t}\cos t\ , \\ y(t) = a\,e^{-t}\sin t\ , \quad t \in [0, 2\pi] \quad (a > 0). \end{cases}$$

Si ricordi che le coordinate del baricentro sono:

$$x_G = \frac{1}{L(\gamma)}\int_\gamma x\,ds\ ,\ y_G = \frac{1}{L(\gamma)}\int_\gamma y\,ds$$

dove $L(\gamma) = \displaystyle\int_\gamma ds.$

7. Data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy \qquad \begin{cases} f_1(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^4} \\ f_2(x,y) = 2y\dfrac{x^2-x+y^4}{x^2+y^4} \end{cases},$$

studiarne il dominio, la chiusura e l'esattezza, determinando una primitiva (se possibile).
Calcolarne inoltre l'integrale curvilineo lungo la curva $y^2 - x = 0$ fra i punti di ascissa 1 e 2 nel 1°quadrante (nell'ordine).

8. Calcolare il seguente integrale superficiale

$$\int_S \frac{z^2}{x\sqrt{1+16x^2+16y^2}}d\sigma$$

dove S rappresenta la superficie del paraboloide $z = 2x^2 + 2y^2$ con (x,y) appartenenti al dominio D, incluso nel primo quadrante, delimitato dalle rette $y = 0$ e $y = x$ e dalle circonferenze centrate nell'origine di raggi 1 e 3.

9. Calcolare il seguente integrale

$$\int\int_D (-8x^2 + 2y^2)dxdy$$

dove D é il dominio delimitato dalle rette $-2x - y = 1$, $-2x - y = 5$, $4x - 2y = 3$, $4x - 2y = 1$.

10. (Facoltativo) Calcolare l'integrale

$$\int\int_S \sqrt{9 + \frac{7}{9}z^2 + 27x^2}d\sigma,$$

dove S e' la superificie dell'ellissoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$.