UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Svolgimento della prova scritta di Matematica II
08 Giugno 2011

Esercizio 1

In $\mathbb{R}^2$ con la struttura di spazio euclideo canonica si considerino le due rette:

$$r : x - 3y + 2 = 0, \qquad s : 2x - y - 1 = 0,$$

1. (a) dire se le rette sono ortogonali e, in caso contrario, calcolare $\widehat{r,s}$;
   (b) trovare almeno due rappresentazioni parametriche di r;
   (c) trovare una retta per $P\,(-1,4)$ parallela ad s.

Svolgimento

a) I vettori direzionali delle rette sono $v_r = (3,1)$ e $v_s = (1,2)$, il cui prodotto scalare è:

$$v_r \cdot v_s = 3 + 2 = 5 \neq 0$$

da cui si evince che le rette non sono tra loro ortogonali e quindi l'angolo tra esse compreso è:

$$\widehat{r,s} = \widehat{v_r, v_s} = \arccos \frac{v_r \cdot v_s}{|v_r|\,|v_s|} = \arccos \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

b) Un punto di r è $Q\,(-2,0)$, quindi una rappresentazione parametrica è:

$$r : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = t \end{cases}$$

Un altro punto è $L\,(1,1)$ e quindi un'altra rappresentazione è:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

c) Una retta $ax + by + c = 0$ che sia parallela ad s deve avere $(-b, a) = v_s$ ovvero deve essere del tipo:

$$2x - y + c = 0.$$

Imponendo il passaggio per P si ha:

$$-2 - 4 + c = 0 \Longrightarrow c = 6$$

e quindi la retta cercata è:

$$2x - y + 6 = 0.$$

Esercizio 2

Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ rappresentato da

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 2-a & 1 & -a \\ -2 & 1 & -a \end{pmatrix},$$

1. (a) dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, si ha $\dim \ker f = 1$ e in tali casi calcolarne una base;
   (b) per i valori calcolati al punto a., dire se $(-2,-2,-1) \in \operatorname{Im} f$;
   (c) dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, f è ortogonalmente diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

Svolgimento

a) Si ha $\dim \ker f = 3 - rkA$ quindi affinché sia $\dim \ker f = 1$ deve aversi $rkA = 2$. A tal fine calcoliamo $|A|$ e imponiamo che sia uguale a 0:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 2-a & 1 & -a \\ -2 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 5a - 4 = 0 \\ &\iff a = 1 \text{ e } a = 4 \\ &\iff rkA \leq 2 \end{aligned}$$

Vediamo quanto vale rkA per questi valori di a. Abbiamo:

$$\begin{aligned} a &= 1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\implies |A_{2,3;1,2}| \neq 0 \\ &\implies rkA = 2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a &= 4 \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \\ &\implies |A_{1,2;1,2}| \neq 0 \\ &\implies rkA = 2 \end{aligned}$$

Concludiamo che entrambi i valori di a trovati sono tali che $\dim \ker f = 1$.

b) Consideriamo $a = 1$. Dai conti fatti al punto precedente, una base di $\operatorname{Im} f$ è data da

$$B = \{(1,1,-2), (1,1,1)\}$$

e affinché $(-2,-2,-1) \in \operatorname{Im} f$ deve aversi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

come in effetti è (in quanto $r_1 = r_2$).

Consideriamo $a = 4$. Dai conti fatti al punto precedente, una base di $\operatorname{Im} f$ è data da

$$B = \{(1,1,-2), (1,1,1)\}$$

e affinché $(-2,-2,-1) \in \operatorname{Im} f$ deve aversi

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

come non è (il determinante in esame vale infatti 6).

c) Perché f sia ortogonalmente diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, la matrice A dev'essere simmetrica, cosa che non può mai accadere osservando che $a_{13} \neq a_{31}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 \sin n \cos n}{\sqrt{35}} \right]^{n+1}$$

Svolgimento:

Per analizzare il carattere della serie e valutarne l'eventuale convergenza studiamo l'assoluta convergenza della serie, di conseguenza

avremo:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left[\frac{2 \sin n \cos n}{\sqrt{35}} \right]^{n+1} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin 2n}{\sqrt{35}} \right|^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin 2n}{\sqrt{35}} \right|^{n} \left| \frac{\sin 2n}{\sqrt{35}} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\sin 2n|}{\sqrt{35}} \right)^{n} \frac{|\sin 2n|}{\sqrt{35}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{35}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{35}} \right)^{n}, \end{aligned}$$

dove $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{35}} \right)^n$ definisce una serie geometrica a ragione minore di 1 e dunque convergente. La serie assegnata, essendo

maggiorata da una serie geometrica convergente converge assolutamente per il criterio del confronto e dunque converge.

Esercizio 4

Stabilire per quali valori di c il punto $A = (1, e^{-\frac{3}{2}})$ è punto critico della seguente funzione

$$F(x,y) = (x-c)y \ln \left(xy^2 \right) + x^2 y \ ;$$

dopodichè, determinare la natura del punto A e degli ulteriori eventuali punti critici della funzione.

Svolgimento

Calcoliamo il gradiente della funzione imponendo che sia nullo nel punto A

$$\begin{array}{c} F_x = y\ln\left(xy^2\right) + (x-c)\,\frac{y}{x} + 2xy \\ F_y = (x-c)\left[\ln\left(xy^2\right) + 2\right] + x^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} F_x\left(1, e^{-\frac{3}{2}}\right) &= -3e^{-\frac{3}{2}} + (1-c)\,e^{-\frac{3}{2}} + 2e^{-\frac{3}{2}} = -ce^{-\frac{3}{2}} = 0 \\ F_y\left(1, e^{-\frac{3}{2}}\right) &= -(1-c) + 1 = 0 \end{aligned}$$

Il valore cercato è $c = 0$.
Il dominio della funzione è l'insieme $D = \left\{(x, y) \in R^2 \;:\; x > 0,\; y \neq 0\right\}$
I punti critici sono le soluzioni in D del sistema:

$$\begin{cases} y\left[\ln\left(xy^2\right) + 1 + 2x\right] = 0 \\ x\left[\ln\left(xy^2\right) + 2 + x\right] = 0 \end{cases}$$

e sono $A = \left(1, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ e $B = \left(1, -e^{-\frac{3}{2}}\right)$.
Calcoliamo le derivate del secondo ordine:

$$\begin{array}{c} F_{xx} = \frac{y}{x} + 2y \\ F_{xy} = \ln\left(xy^2\right) + 2x + 3 \\ F_{yy} = 2\frac{x}{y} \end{array}$$

Quindi il punto A è di miniimo relativo e il punto B di massimo relativo.
Esercizio 5
Risolvere le seguenti equazioni differenziali

a. $\quad y''' - 3y'' + 2y' = (x-1)\left(e^x - 2\right)$

b. $\quad \begin{cases} y' + 9x^{-1}y = 3e^x x^{-2} y^{2/3} \\ y(1) = -8 \end{cases}$

Svolgimento
Cominciamo la risolvere la prima equazione

$$y''' - 3y'' + 2y' = (x-1)\left(e^x - 2\right)$$

Determiniamo la soluzione dell'equazione omogenea associata

$$\begin{aligned} & y''' - 3y'' + 2y' = 0 \\ & \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \qquad \leftrightarrow \lambda_1 = 0,\;\; \lambda_2 = 1,\;\; \lambda_3 = 2 \\ & \qquad y_0(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} \qquad \text{(soluz. omogenea ass.)} \end{aligned}$$

l

a soluzione particolare è del tipo:

$$y_p(x) = x\,(Ax + B)\,e^x + x\,(Cx + D)$$

derivando e sostituendo nell'equazione si calcolano i coefficienti ottenendo

$$y_p(x) = -x\left(\frac{1}{2}x - 1\right)e^x - \frac{x}{2}(x+1)$$

La soluzione dell'equazione è:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} - x\left(\frac{1}{2}x - 1\right)e^x - \frac{x}{2}(x+1)$$

Passiamo alla seconda equazione differenziale: si tratta di una equazione differenziale di Bernoulli dalla cui risoluzione si ottiene

$$y(c,x) = \frac{[(x-1)e^x + c]^3}{x^9}, \ c = -2.$$

Esercizio 6:
Determinare il valore dell'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{y^3}{(x+1)^2} ds$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = \dfrac{3}{t} \end{cases} \qquad t \in [1,2].$$

Svolgimento
A partire dalla parametrizzazione della curva ricaviamo

$$\gamma'(t) = \begin{cases} x'(t) = 2 \\ y'(t) = -\dfrac{3}{t^2} \end{cases}$$

da cui

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4 + \frac{9}{t^4}}.$$

L'integrale curvilineo dunque risulta:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{(3/t)^3}{(2t)^2}\sqrt{4+\frac{9}{t^4}}dt &= \frac{3^3}{2^2}\int_1^2 \frac{1}{(t)^5}\sqrt{4+\frac{9}{t^4}}dt \\
&= \frac{3^3}{2}\int_1^2 \frac{1}{(t)^5}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2t^2}\right)^2}dt \\
&= -3\int_1^2 \frac{3}{2t^2}\left(-\frac{3}{(t)^3}\right)\sqrt{1+\left(\frac{3}{2t^2}\right)^2}dt
\end{aligned}$$

che per sostituzione $z = \frac{3}{2t^2}$ e $dz = \left(-\frac{3}{(t)^3}\right)$ risulta:

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2}\int_{z_1}^{z_2} 2z\sqrt{1+z^2}dz &= \left[-(1+z^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{z_1}^{z_2} = \left[-\left(1+\left(\frac{3}{2t^2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 \\
&= \left(-\left(1+\left(\frac{3}{8}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(-\left(1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{13}{8}\sqrt{13} - \frac{73}{512}\sqrt{73}.
\end{aligned}$$

Esercizio 7:
Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = (4xdx + 9ydy)\sqrt{36-4x^2-9y^2},$$

studiarne il dominio, la chiusura, l'esattezza e determinarne le eventuali primitive. Determinarne poi l'integrale curvilineo sul segmento di equazioni parametriche $(3t, 2t)/\sqrt{2}$, con $t \in [-1, 1]$.

Svolgimento:
Innanzitutto riscriviamo la forma nel modo seguente:

$$\omega(x,y) = \left(4x\sqrt{36-4x^2-9y^2}\right)dx + \left(9y\sqrt{36-4x^2-9y^2}\right)dy$$

L'insieme di definizione risulta per $36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0$ che rappresenta la porzione di dominio interna alla ellisse di equazione $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$. Il dominio è dunque un aperto semplicemente connesso. La forma risulta chiusa, dato che

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = -36x\frac{y}{\sqrt{-4x^2-9y^2+36}},$$

inoltre la forma è esatta dato che il dominio è semplicemente connesso. Calcoliamo la primitiva:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int 4x\sqrt{36-4x^2-9y^2}dx = -\frac{1}{3}\left(-4x^2-9y^2+36\right)^{\frac{3}{2}} + g(y) \\
&\Downarrow \\
f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{3}\left(-4x^2-9y^2+36\right)^{\frac{3}{2}} + g(y)\right) = 9y\sqrt{-4x^2-9y^2+36} + g'(y)
\end{aligned}$$

da cui $g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$

$$f(x,y) = -\frac{1}{3}\left(-4x^2-9y^2+36\right)^{\frac{3}{2}} + c.$$

A questo punto calcoliamo l'integrale della forma lungo il segmento di equazioni parametriche $x(t) = \left(3/\sqrt{2}\right) t$, $y(t) = \left(2/\sqrt{2}\right) t$, con

$t \in [-1, 1]$ e dunque di equazione cartesiana $y = \frac{2}{3}x$ con $x \in \left[-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ ossia dai punti $A(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$ e $B(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$. I punti A e B sono

punti appartenenti al dominio essendo punti delle frontiera dell'ellisse, di conseguenza essendo la forma esatta su tutto il dominio

l'integrale risulta la differenza dei valori assunti dalla primitiva nei punti considerati:

$$\int_\gamma \omega = f(B) - f(A) = 0.$$

Esercizio 8:
Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_S \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}\right) d\sigma,$$

dove S e' la superificie della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
Svolgimento:

Parametrizziamo la superficie utilizzando le coordinate polari sferiche:

$$\begin{cases} x = 2\sin\theta\cos\varphi \\ y = 2\sin\theta\sin\varphi \\ z = 2\cos\theta \end{cases},$$

dove $\theta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$, da cui $\Phi_\theta = 2(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$, $\Phi_\varphi = 2(-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0)$ quindi

$$\begin{aligned}
|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi| &= \left\| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2\cos\theta\cos\varphi & 2\cos\theta\sin\varphi & -2\sin\theta \\ -2\sin\theta\sin\varphi & 2\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left|\mathbf{i}(4\sin^2\theta\cos\varphi) + \mathbf{j}(4\sin^2\theta\sin\varphi) + \mathbf{k}(4\sin\theta\cos\theta)\right. \\
&= 4\sqrt{\sin^4\theta\cos^2\varphi + \sin^4\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\theta} \\
&= 4\sqrt{\sin^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} = 4\sin\theta
\end{aligned}$$

l'elemento di superficie diviene dunque $\sin\theta$ e dunque l'integrale si riduce a

$$\begin{aligned}
\int_S \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}\right) d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{(2\sin\theta\cos\varphi)^2}{4} + \frac{(2\sin\theta\sin\varphi)^2}{16}\right) 4\sin\theta \; d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{(2\sin\theta\cos\varphi)^2}{4} 4\sin\theta \; d\varphi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{(2\sin\theta\sin\varphi)^2}{16} 4\sin\theta \; d\varphi d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \; d\varphi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \; d\varphi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \\
&= \frac{20}{3}\pi
\end{aligned}$$

Esercizio 9:
Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{4+x^2+y^2}dxdy$$

dove D é il dominio

$$D = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9, x \geq 0\} \cup \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9 : y \leq x\}.$$

Svolgimento:
Passando alle coordinate polari risulta

$$\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 \frac{\rho^2}{4+\rho^2} d\rho d\theta$$

Dunque

$$\frac{5}{4}\pi\left(2 - \int_1^3 \frac{4}{4+\rho^2}d\rho\right) = \frac{5}{4}\pi\left(2 - 8\left[\text{arctg}\left(\frac{\rho}{2}\right)\right]_1^3\right) = \frac{5}{2}\pi\left(1 - 4\text{arctg}\frac{3}{2} + 4\text{arctg}\frac{1}{2}\right).$$

Esercizio 10:

Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F} = \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\mathbf{k}\right)$ uscente dalla porzione del paraboloide definita da $x^2+y^2 \leq 3z \leq 9$.

Svolgimento:

La superficie assegnata $\frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right) \leq z \leq 3$ la si puo' vedere come unione delle due seguenti superfici S_1 che rappresenta il parabolide

di equazione $z = \frac{1}{3}\left(x^2+y^2\right)$, dove $(x,y) \in D = \{(x,y) : \left(x^2+y^2\right) \leq 9\}$ ed S_2 che rappresenta il piano di equazione $z = 3$, dove

$(x,y) \in D = \{(x,y) : \left(x^2+y^2\right) \leq 9\}$. Calcoliamo i vettori relativi alla prima ed alla seconda superficie. Nel caso di S_1 risulta:

$$S_1 : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = \frac{1}{3}\left(u^2+v^2\right) \end{cases},$$

dove $(u,v) \in D$; otteniamo $\varphi_u = (1, 0, \frac{2}{3}u)$, $\varphi_v = (0, 1, \frac{2}{3}v)$, da cui

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{2}{3}u \\ 0 & 1 & \frac{2}{3}v \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-\frac{2}{3}u) + \mathbf{j}(-\frac{2}{3}v) + \mathbf{k}.$$

Nel caso di S_2 si ha che

$$S_1 : \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = 3 \end{cases}$$

dove $(u,v)\in D$; otteniamo $\varphi'_u=(1,0,0)$, $\varphi'_v=(0,1,0)$, da cui

$$\varphi'_u \wedge \varphi'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}.$$

Il flusso uscente dalla superficie sarà la somma dei flussi uscenti dalle due superifici considerate. Cominciamo a calcolare quello

uscente dalla superificie S_1, per il quale occorre invertire il segno al vettore normale alla superificie per ottenere il flusso uscente dalla

superficie e non quello entrante:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \int_D \mathbf{F}(u,v)\cdot [-(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{u}} \wedge \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{v}})]\, dudv \\
&= \int_D \left(3\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^2}\mathbf{k}\right)\cdot \left[\mathbf{i}(-\frac{2}{3}u)+\mathbf{j}(-\frac{2}{3}v)+\mathbf{k}\right] dudv \\
&= 3\int_D \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} dudv
\end{aligned}$$

a questo punto passiamo alle coordinate polari ed otteniamo:

$$\Phi_1 = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 d\rho = 18\pi.$$

Calcoliamo adesso il flusso uscente dalla superificie S_2 :

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \int_D \mathbf{F}(u,v)\cdot (\boldsymbol{\varphi'}_{\mathbf{u}} \wedge \boldsymbol{\varphi'}_{\mathbf{v}})\, dudv \\
&= \frac{1}{3}\int_D \sqrt{u^2+v^2} dudv
\end{aligned}$$

a questo punto passiamo alle coordinate polari ed otteniamo:

$$\Phi_2 = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \rho^2 d\rho = 6\pi,$$

da cui

$$\Phi = 24\pi.$$

Per il secondo esercizio facoltativo, dalla applicazione del secondo Teorema di Guldino ne discende che

$$\begin{aligned}
Area &= 2\pi\, y_G\, L(\gamma) = 2\pi \int_\gamma y\, ds = \frac{64}{3}\pi. \\
(G &= baricentro\ di\ \gamma)
\end{aligned}$$