UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Prova scritta di Matematica II
08 Giugno 2011

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU risolvano i quesiti numero 3-4-5-6-7-8-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (con geometria) risolvano i quesiti numero 1-2-4-5-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (senza geometria) risolvano i quesiti numero 4-5-7-9

1. In $\mathbb{R}^2$ con la struttura di spazio euclideo canonica si considerino le due rette:

$$r : x - 3y + 2 = 0, \qquad s : 2x - y - 1 = 0,$$

   (a) dire se le rette sono ortogonali e, in caso contrario, calcolare $\widehat{r,s}$;
   (b) trovare almeno due rappresentazioni parametriche di r;
   (c) trovare una retta per $P(-1,4)$ parallela ad s.

2. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ rappresentato da

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 2-a & 1 & -a \\ -2 & 1 & -a \end{pmatrix},$$

   (a) dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, si ha $\dim\ker f = 1$ e in tali casi calcolarne una base;
   (b) per i valori calcolati al punto a., dire se $(-2,-2,-1) \in \operatorname{Im} f$;
   (c) dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$, f è ortogonalmente diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

3. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{35}\sin n\cos n}\right]^{n+1}.$$

4. Stabilire per quali valori di c il punto $A = (1, e^{-\frac{3}{2}})$ è punto critico della seguente funzione

$$F(x,y) = (x-c)y\ln\left(xy^2\right) + x^2y\ ;$$

   dopodichè, determinare la natura del punto A e degli ulteriori eventuali punti critici della funzione.

5. Risolvere le seguenti equazioni differenziali

$$\textbf{a}. \qquad y''' - 3y'' + 2y' = (x-1)(e^x - 2)$$

$$\textbf{b}. \qquad \begin{cases} y' + 9x^{-1}y = 3e^x x^{-2} y^{2/3} \\ y(1) = -8 \end{cases}$$

6. Determinare il valore dell'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{y^3}{(x+1)^2} ds$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = \dfrac{3}{t} \end{cases} \qquad t \in [1, 2].$$

7. Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x, y) = (4xdx + 9ydy)\sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2},$$

studiarne il dominio, la chiusura, l'esattezza e determinarne le eventuali primitive. Determinarne poi l'integrale curvilineo sul segmento di equazioni parametriche $(3t, 2t)/\sqrt{2}$, con $t \in [-1, 1]$.

8. Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_S \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}\right) d\sigma,$$

dove S e' la superificie della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

9. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{4 + x^2 + y^2} dxdy$$

dove D é il dominio

$$D = \left\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0\right\} \cup \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 : y \leq x\}.$$

10. (Facoltativo) Risolvere uno dei seguenti esercizi:

(i) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F} = \left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\mathbf{k}\right)$ uscente dalla porzione del paraboloide definita da $x^2 + y^2 \leq 3z \leq 9$.

(ii) Calcolare l'area della superficie di rivoluzione attorno all'asse x della curva (*cicloide)*:

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$