UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Svolgimento della prova scritta - fuori corso - di Matematica II
25 Marzo 2010

1. In $\mathbb{R}^2$ con la struttura di spazio euclideo definita dal seguente prodotto scalare:

$$u \cdot v = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = 2u_1v_1 + u_2v_2$$

si considerino le due rette:

$$r : 2x - y + 1 = 0, \qquad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + t \end{cases},$$

a) calcolare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ a partire dai vettori direzionali di r, s;

b) calcolare l'angolo formato dai vettori direzionali di r, s.

Soluzione

a) I vettori direzionali delle rette r ed s sono rispettivamente $v_r = (1, 2)$ e $v_s = (-1, 1)$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} |v_r| &= \sqrt{2 \cdot 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \\ |v_s| &= \sqrt{2 \cdot (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ v_r \cdot v_s &= 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

quindi v_r è ortogonale a v_s e pertanto per trovare la base ortonormale cercata basta dividere i due vettori per la propria norma, ovvero

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$$

b) Da quanto visto al punto precedente, si ha $\widehat{v_r, v_s} = \frac{\pi}{2}$.

2. Data l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, la cui matrice rappresentativa è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

(a) calcolare la dimensione e una base di $\ker f$ e di $\operatorname{Im} f$;

(b) calcolare $f^{-1}(0, -1, 1)$;

(c) dire se f è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

Soluzione

a. Osserviamo che $|A| = 0$ e $|A_{1,2;2,3}| \neq 0$, quindi $\dim \operatorname{Im} f = rkA = 2$ e una sua base è $B_{\operatorname{Im} f} = \{(1,0,1), (-2,-1,-3)\}$, mentre $\dim \ker f = 3 - rkA = 1$ e una sua base si ottiene risolvendo il sistema lineare ridotto:

$$\begin{cases} y - 2z = -x \\ -z = -3x \end{cases}$$

da cui $\ker f = \{(x, 5x, 3x) \,|x \in \mathbb{R}\}$ e una sua base è $B_{\ker f} = \{(1,5,3)\}$.

b. La controimmagine richiesta è data dalle soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x - z = -1 \\ 4x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

Osservando che $rkA = 2$ e $rkA' = 3$, abbiamo $f^{-1}(0,-1,1) = \varnothing$.

c. Gli autovalori di f sono dati dalle soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$|A - hI| = \begin{vmatrix} 1-h & 1 & -2 \\ 3 & -h & -1 \\ 4 & 1 & -3-h \end{vmatrix} = -h^3 - 2h^2 - 3h = 0$$

le cui soluzioni sono $0, -1 \pm i\sqrt{2}$. Poiché abbiamo un solo autovalore su $\mathbb{R}$ e tre autovalori distinti su $\mathbb{C}$, concludiamo che f non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ ed è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

3. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (7n+1)}{n \log n}$$

Soluzione
La serie é convergente poiché a segni alterni, decrescente ed infinitesima.
Per capire che é decrescente si puó ad esempio calcolare la derivata prima di $\frac{7x+1}{xlogx}$ e vedere che é < 0 da un certo punto in poi.

4. Determinare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione:

$$f(x,y) = y^2 \cdot x^{\sqrt{x}}.$$

Soluzione
Il campo di esistenza della funzione risulta $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$.

$$f_x = y^2 \left(\frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \left(\tfrac{1}{2} \log x + 1 \right) \right) \quad f_y = 2y \cdot x^{\sqrt{x}}$$

$$f_y = 2y \cdot x^{\sqrt{x}}$$

Da cui

$$\nabla f = (0, 0)$$

se e solo se $y = 0$.

Tale semiretta (i. e. $(0, +\infty) \times \{0\}$) é di minimo assoluto poiché la funzione é sempre non negativa. La funzione non ammette massimi assoluti o relativi dal momento che la funzione tende all'infinito per x ed y che vanno all'infinito.

5. Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

a. $9x^2y' + x(2y' - 7) + y' + 7 = 0$

b. $y^{IV} - 16 = \cos^2 x$

Soluzione

a. Per risolvere l'equazione differenziale occorre riscriverla come segue:

$$\begin{aligned} 9x^2y' + x(2y' - 7) + y' + 7 &= 0 \\ &\Downarrow \\ y' &= \frac{7x - 7}{9x^2 + 2x + 1} \end{aligned}$$

che è a variabili separabili, per cui

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{7x - 7}{9x^2 + 2x + 1} dx \\ &\Downarrow \\ y &= \frac{7}{18} \ln\left(x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{35}{36}\sqrt{2}\pi - \frac{35}{18}\sqrt{2} \arctan\sqrt{2}\left(\frac{9}{4}x + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

b. Per risolvere l'equazione differenziale occorre riscriverla come segue:

$$\begin{aligned} y'''' - 16y &= \cos^2 x \\ &\Downarrow \\ y'''' - 16y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \end{aligned}$$

la cui equazione caratteristica risulta:

$$\lambda^4 - 16 = 0$$

che ammette soluzioni in $\lambda_{1,2} = \pm 2$ e $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ da cui

$$y_o = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_3 \sin 2x$$

mentre la particolare risulta

$$y_p = A + x(B \cos 2x + D \sin 2x),$$

da cui

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(A + x(B\cos 2x + D\sin 2x)\right) = B\cos 2x + D\sin 2x - 2Bx\sin 2x + 2xD\cos 2x \\
y'' &= \frac{d}{dx}(B\cos 2x + D\sin 2x - 2Bx\sin 2x + 2xD\cos 2x) = 4D\cos 2x - 4B\sin 2x - 4Bx\cos 2x - 4xD \\
y''' &= \frac{d}{dx}(4D\cos 2x - 4B\sin 2x - 4Bx\cos 2x - 4xD\sin 2x) = 8Bx\sin 2x - 12D\sin 2x - 12B\cos 2x - \\
y'''' &= \frac{d}{dx}(8Bx\sin 2x - 12D\sin 2x - 12B\cos 2x - 8xD\cos 2x) = 32B\sin 2x - 32D\cos 2x + 16Bx\cos 2
\end{aligned}
$$

che sostituendo restituisce

$$
\begin{aligned}
y'''' - 16y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2 \\
&\Downarrow \\
32B\sin 2x - 32D\cos 2x + 16Bx\cos 2x + 16xD\sin 2x - 16(A + x(B\cos 2x + D\sin 2x)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2 \\
&\Downarrow \\
-64D\cos^2 x + 64B\cos x\sin x + 32D - 16A &= \cos^2 x
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{cases}
-16A + 32D = 0 \\
B = 0 \\
D = -\frac{1}{64}
\end{cases}
$$

le cui soluzioni sono $A = -\frac{1}{32}, B = 0, D = -\frac{1}{64}$, che sostituiti nella soluzione particolare diviene:

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_3\sin 2x - \frac{1}{32} - \frac{1}{64}x\sin 2x$$

6. Si determini il valore dell'integrale della funzione $f(x, y) = x$ esteso alla curva di equazioni parametriche

$$
\begin{cases}
x(t) = 3 + 2\cos(t^2) \\
y(t) = 1 + 2\sin(t^2)
\end{cases}
$$

dal punto di coordinate $A = (3+\sqrt{3}, 2)$ al punto $B = (2, 1+\sqrt{3})$, in senso antiorario.

Soluzione

Possiamo subito scrivere

$$
\begin{cases}
x'(t) = -4t\sin(t^2) \\
y'(t) = 4t\cos(t^2)
\end{cases}
$$

quindi $ds = 4|t|dt$. Vediamo che nell'intervallo che ci interessa è possibile scegliere t positivo, infatti è facile verificare che i punti A e B corrispondono rispettivamente ai valori $t_1^2 = \pi/6 + 2k\pi$ e $t_2^2 = 2\pi/3 + 2k\pi$, quindi scegliendo $k = 0$, l'integrale diventa

$$\int_\gamma x ds = \int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{2\pi/3}} (3+2\cos(t^2))4tdt = \left[6t^2 + 4\sin(t^2)\right]_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{2\pi/3}} = 3\pi+2(\sqrt{3}-1)$$

7. Data la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \frac{2x+y}{x^2+xy}dx + \frac{x+2y}{xy+y^2}dy,$$

studiarne l'insieme di definizione, la chiusura e l'esattezza, e se è il caso determinarne le primitive. Determinare poi il valore dell'integrale della forma differenziale sul segmento di primo estremo $A = (2,1)$ e secondo estremo $B = (1,1)$.

Soluzione

L'insieme di definizione è dato da tutto $\mathbb{R}^2$, ad esclusione dei due assi e della bisettrice di 2° e 4° quadrante, che non è connesso, ma è l'unione di 6 aperti disgiunti e semplicementre connessi.

La forma differenziale è chiusa, dato che

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{1}{(x+y)^2}.$$

La forma differenziale è esatta su ciascuna delle 6 componenti connesse in cui è suddiviso l'insieme di definizione, dato che è chiusa e per le considerazioni fatte in precedenza sull'insieme di definizione.

Determiniamo le primitive:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int \frac{2x+y}{x^2+xy}dx = \log\left|x^2+xy\right| + c(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{x^2+xy} + c'(y) \end{aligned}$$

e da $\partial f/\partial y = b$ ricaviamo

$$\frac{x}{x^2+xy} + c'(y) = \frac{x+2y}{xy+y^2}, c'(y) = \frac{1}{y}, c(y) = \log|y| + k,$$

quindi, in definitiva

$$f(x,y) = \log|x^2+xy| + \log|y| + k = \log|x^2y+xy^2| + k = \log|xy(x+y)| + k.$$

L'integrale della forma differenziale è

$$\int_\gamma \omega = f(x_B, y_B) - f(x_A, y_A) = \log 2 - \log 6 = -\log 3.$$

8. Calcolare il seguente integrale superficiale:

$$\int_s (2xy)\, d\sigma$$

dove S è la parte di superficie del cilindro $\left(x^2+y^2\right)=4$ con $0<z<3$, $x \geq 0$

Soluzione

La formula per il calcolo dell'integrale superficiale è

$$I=\int\int_D g(x,y)\sqrt{A^2+B^2+C^2}dxdy$$

dove,in questo caso, $g(x,y)=2xy$, $\sqrt{A^2+B^2+C^2}=2$ e $D=\left\{(x,y)\in R^2 \ : \quad 0 \leq x^2+y^2 \ \leq 4\right\}$.Una rappresentazione parametrica della superficie è:

$$\left\{\begin{array}{r} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \\ z=z \end{array}\right. \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ ,0<z<3$$

$$I=\int_s 2xyd\sigma = 4\int\int_D (xy)\, dxdy$$

Utilizzando le coordinate polari:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{array}\right.$$

con $D=\left\{(\rho,\theta): \quad 0\leq\rho\leq 2; \quad -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right\}$si ottiene

$$I=4\int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta = 4\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0$$

9. Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_D \frac{x^2dxdy}{|y|}$$

dove D è il seguente insieme

$$D=\left\{(x,y)\in R^2: \quad 0\leq x\leq y;\ 9\leq x^2+y^2\leq 16\right\}$$

Soluzione

Questo integrale doppio può essere risolto utilizzando le coordinate polari:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{array}\right.$$

L' insieme D può essere riscritto nel seguente modo

$$D = \left\{ (\rho, \theta) : \quad 3 \leq \rho \leq 4; \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

quindi

$$I = \int\int_D \frac{x^2 dx dy}{|y|} = \int_3^4 \rho \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2 \cos^2\theta}{|\rho \sin\theta|} d\theta \right) d\rho = \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_3^4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2\theta}{\sin\theta} d\theta = \frac{37}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin\theta} - 1 \right) d\theta =$$

$$= \frac{37}{3} \left[\ln\left(\tan\frac{\theta}{2} \right) - \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{37}{3} \left[\ln\left(\tan\frac{\pi}{4} \right) - \frac{\pi}{2} - \ln\left(\tan\frac{\pi}{8} \right) + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{37}{3} \left(-\frac{\pi}{4} - \ln\left(\tan\frac{\pi}{8} \right) \right).$$

10. (Facoltativo) Dimostrare che la derivata parziale di una funzione è un caso particolare della derivata direzionale, ovvero provare la validità delle seguenti eguaglianze per una funzione derivabile $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{x}) &= \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{x}) &= \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{w}}(\overrightarrow{x}) \end{aligned}$$

segliendo opportunamente il vettore direzione.

Soluzione

Dimostriamo la prima delle due eguaglianze, scegliendo come versore $\overrightarrow{v} = (1, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\overrightarrow{x} + h\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{x})}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\overrightarrow{x} + h(1,0)) - f(\overrightarrow{x})}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f((x,y) + (h,0)) - f(x,y)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f((x+h,y) - f(x,y)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{x}). \end{aligned}$$

Allo stesso modo si prova la seconda scegliendo come versore $\overrightarrow{v} = (0, 1)$.