UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Prova scritta Fuori Corso di Matematica II
25 Marzo 2011

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU risolvano i quesiti numero 3-4-5-6-7-8-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (con geometria) risolvano i quesiti numero 1-2-4-5-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (senza geometria) risolvano i quesiti numero 4-5-7-9

1. In $\mathbb{R}^2$ con la struttura di spazio euclideo definita dal seguente prodotto scalare:

$$u \cdot v = (u_1, u_2) \cdot (v_1, v_2) = 2u_1v_1 + u_2v_2$$

si considerino le due rette:

$$r : 2x - y + 1 = 0, \qquad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + t \end{cases},$$

a) calcolare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ a partire dai vettori direzionali di r, s;

b) calcolare l'angolo formato dai vettori direzionali di r, s.

2. Data l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$, la cui matrice rappresentativa è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

(a) calcolare la dimensione e una base di $\ker f$ e di $\operatorname{Im} f$;

(b) calcolare $f^{-1}(0, -1, 1)$;

(c) dire se f è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

3. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(7n+1)}{n \log n}$$

4. Determinare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione:

$$f(x, y) = y^2 \cdot x^{\sqrt{x}}.$$

5. Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

a. $9x^2y' + x(2y' - 7) + y' + 7 = 0$
b. $y^{IV} - 16y = \cos^2 x$

6. Si determini il valore dell'integrale della funzione $f(x,y) = x$ esteso alla curva di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x(t) = 3 + 2\cos(t^2) \\ y(t) = 1 + 2\sin(t^2) \end{cases}$$
dal punto di coordinate $A = (3+\sqrt{3}, 2)$ al punto $B = (2, 1+\sqrt{3})$, in senso antiorario.

7. Data la forma differenziale lineare
$$\omega(x,y) = \frac{2x+y}{x^2+xy}dx + \frac{x+2y}{xy+y^2}dy,$$
studiarne l'insieme di definizione, la chiusura e l'esattezza, e se è il caso determinarne le primitive. Determinare poi il valore dell'integrale della forma differenziale sul segmento di primo estremo $A = (2,1)$ e secondo estremo $B = (1,1)$.

8. Calcolare il seguente integrale superficiale:
$$\int_s (2xy)\, d\sigma$$
dove S è la parte di superficie del cilindro $\left(x^2+y^2\right) = 4$ con $0 < z < 3$, $x \geq 0$

9. Calcolare il seguente integrale doppio
$$\int\int_D \frac{x^2 dxdy}{|y|}$$
dove D è il seguente insieme
$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : \quad 0 \leq x \leq y;\ 9 \leq x^2+y^2 \leq 16\right\}$$

10. (Facoltativo) Dimostrare che la derivata parziale di una funzione è un caso particolare della derivata direzionale, ovvero provare la validitá delle seguenti eguaglianze per una funzione derivabile $f(x,y)$:
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{x}) &= \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{x}) &= \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{w}}(\overrightarrow{x}) \end{aligned}$$
scegliendo opportunamente il vettore direzione.