UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Svolgimento della prova scritta di Matematica II
12 Gennaio 2010

Esercizio 1
In $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$V = \langle (1,0,-1,2), (3,1,0,-2), (5,1,-2,2) \rangle, \quad W = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 |\ x - 3y + 2t = 0 \right\}$$

a) calcolare la dimensione e una base ortonormale di V;

b) calcolare la dimensione e una base di $V + W^{\perp}$;

c) dire se $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Svolgimento
a) Si osservi che

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 = \dim V$$

e una base di V è data da $B_V = \{(1,0,-1,2), (3,1,0,-2)\}$. Applicando il procedimento di Gram-Schmidt a tale base, si ha:

$$v_1 = \frac{(1,0,-1,2)}{|(1,0,-1,2)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\begin{aligned}
v_2' &= (3,1,0,-2) - \left[(3,1,0,-2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right] \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) = \\
&= (3,1,0,-2) + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) = \\
&= (3,1,0,-2) + \left(\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{6}, \frac{2}{6} \right) = \\
&= \left(\frac{19}{6}, 1, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{3} \right) \\
v_2 &= \frac{v_2'}{|v_2'|} = \frac{12}{79} \left(\frac{19}{6}, 1, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{3} \right) = \left(\frac{38}{79}, \frac{12}{79}, -\frac{2}{79}, -\frac{20}{79} \right)
\end{aligned}$$

Una base ortonormale di V è data da $B_V' = \{v_1, v_2\}$.

b) Ricordando che $V + W^{\perp} = \langle B_V \cup B_{W^{\perp}} \rangle$ e osservando che $B_{W^{\perp}} = \{(1,-3,0,2)\}$ e che

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 = \dim V + W^{\perp}$$

abbiamo che una base di $V + W^\perp$ è data proprio da $B_V \cup B_{W^\perp}$.

c) Osservando che $\dim W = 3$ e che $\dim V + W \leq 4$, ricordando la relazione di Grassman, abbiamo

$$\begin{aligned} 4 &\geq \dim V + W = \dim V + \dim W - \dim V \cap W = 2 + 3 - \dim V \cap W \\ &\Longrightarrow \dim V \cap W \geq 1 \end{aligned}$$

da cui concludiamo che $V \cap W \neq \{\mathbf{0}\}$.

Esercizio 2

Data l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$, la cui matrice rappresentativa è data da:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

a. calcolare la dimensione e una base di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$;
b. dire se f è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$;
c. dire se f è ortgonalmente diagonalizzabile su $\mathbb{R}$;
d. calcolare una base per ogni autospazio reale
e. calcolare l'inversa di A, se possibile.

Svolgimento

a) Osservando che $|A| = 0$ e che $|A_{1,2;1,2}| \neq 0$, si ha $\dim \operatorname{Im} f = rkA = 2$ e una base di $\operatorname{Im} f$ è data dalle prime due colonne di A, cioè $B_{\operatorname{Im} f} = \{(-1,-2,-1), (2,-1,-1)\}$. Ne segue che $\dim \ker f = 1$ e una base di $\ker f$ si ottiene risolvendo il sistema lineare ridotto:

$$\ker f : \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $\ker f = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, da cui una base di $\ker f$ è $B_{\ker f} = \{(0,0,1)\}$.

b) Calcoliamo gli autovalori di A attraverso il polinomio caratteristico:

$$|A - hI| = -h\left(h^2 + 2h + 5\right) = 0$$

da cui si ricavano gli autovalori 0, $-1 \pm 2i$, tutti gli molteplicità 1. Ne segue che f non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (perché non tutti gli autovalori sono reali), mentre è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ (perché ci sono tre autovalori complessi distinti).

c) L'endomorfismo non è ortogonalmente diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ perché A non è simmetrica.

d) L'unico autospazio reale V_0 corrisonde al $\ker f$, quindi è già stato calcolato al punto a).

e) Perché la matrice data sia invertibile, dev'essere $\det A \neq 0$ quindi, dai calcoli svolti al punto a), possiamo concludere che nel caso in esame, A non è invertibile.

Esercizio 3

Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(7n+5)}{n^2+3}$$

Svolgimento:

La serie assegnata è a segni alterni, infinitesima e decrescente dunque convergente per il criterio di Leibnitz. In particolare è decrescente, poiché:

$$a_{n+1} = \frac{7(n+1) + 5'}{(n+1)^2 + 3} = \frac{7n + 12 \quad '}{n^2 + 2n + 3} \leq \frac{(7n+5)}{n^2+3} = a_n,$$

ed è infinitesima essendo:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n+5}{n^2+3} = 0,$$
di conseguenza in base al criterio di Leibnitz risulta convergente.

Esercizio 4

Determinare i punti di massimo e minimo assoluti e relativi della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2}$$

Svolgimento

Calcoliamo il gradiente della funzione, esso risluta:

$$\nabla f = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+3y^2}}, \frac{6y}{\sqrt{x^2+3y^2}} \right)$$

di conseguenza l'unico punto critico risulterebbe il punto $(0,0)$ che però rende nullo anche il denominatore, di conseguenza, non appartienendo al campo di differenziabilità della funzione, non è un punto accettabile. In realtà il punto $O(0,0)$ è un punto di minimo relativo ed assoluto poiché la funzione in O assume valore nullo ed inoltre essa è sempre positiva: $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in R^2$.

Esercizio 5

Risolvere i seguenti problemi:

a. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'''' - 6y''' + 10y'' - 6y' + 9y = \sqrt[8]{81}\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x$$

b. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$x(2y'-1) + 2y(1-2y') - 2(3y'+8) = 0$$

Svolgimento

a. Per calcolare l'integrale generale della equazione differenziale seguente:

$$y'''' - 6y''' + 10y'' - 6y' + 9y = \sqrt[8]{81}\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x,$$

che equivale a

$$\begin{array}{rcl} y'''' - 6y''' + 10y'' - 6y' + 9y & = & \sqrt{3}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right), \\ & \Downarrow & \\ y'''' - 6y''' + 10y'' - 6y' + 9y & = & \sqrt{3}\cos 2x \end{array}$$

consideriamo l'equazione omogenea associata:

$$y'''' - 6y''' + 10y'' - 6y' + 9y = 0$$

da cui l'equazione caratteristica risulta:

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 10\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

le cui soluzioni sono $\lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_{3,4} = 3$; di conseguenza la soluzione della omogenea sarà:

$$y_o(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

A questo punto occorre individuare la soluzione particolare, che sarà del tipo:

$$y_p(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$$

calcoliamone le derivate:

$$\begin{array}{rcl} y_p'(x) & = & 2B \cos 2x - 2A \sin 2x \\ y_p''(x) & = & -4A \cos 2x - 4B \sin 2x \\ y_p'''(x) & = & 8A \sin 2x - 8B \cos 2x \\ y_p''''(x) & = & 16A \cos 2x + 16B \sin 2x \end{array}$$

da cui segue

$$\begin{array}{rcl} y'''' - 6y''' + 10y'' - 6y' + 9y & = & \sqrt{3} \cos 2x \\ & \Downarrow & \end{array}$$

$$16A \cos 2x + 16B \sin 2x - 6(8A \sin 2x - 8B \cos 2x) + 10(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x) + \\ -6(2B \cos 2x - 2A \sin 2x) + 9(A \cos 2x + B \sin 2x) = \sqrt{3} \cos 2x$$

da cui risulta che

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{5}{507}\sqrt{3} \cos 2x + \frac{4}{169}\sqrt{3} \sin 2x$$

b. Calcolare l'integrale generale della equazione differenziale seguente:

$$x(2y' - 1) + 2y(1 - 2y') - 2(3y' + 8) = 0$$

Innanzitutto, possiamo riscrivere l'equazione come segue:

$$
\begin{aligned}
y'(2x-4y+6) &= x-2y+16 \\
&\Downarrow \\
y' &= \frac{x-2y+16}{2(x-2y+3)}
\end{aligned}
$$

le due rette sono parallele, per cui facciamo la seguente posizione

$$u = x - 2y$$

da cui

$$y = \frac{x-u}{2} \Rightarrow y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-u(x)}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u'$$

che sostituendo nella equazione differenziale assegnata, diviene:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u' &= \frac{u+16}{2(u+3)} \\
&\Downarrow \\
\frac{1}{2} - \frac{u+16}{2(u+3)} &= \frac{1}{2}u' \\
-\frac{13}{(u+3)} &= u'
\end{aligned}
$$

di conseguenza trattandosi di una equazione a variabili separabili risulta:

$$
\begin{aligned}
\int (u+3)du &= \int -13dx \\
&\Downarrow \\
u^2 + 3u &= -13x + C \\
&\Downarrow \\
(x-2y)^2 + 3(x-2y) &= -13x + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 6:
Assegnata nel piano la forma differenziale lineare seguente

$$\omega(x,y) = (2xe^y - 5y)dx + (x^2e^y - 5x)dy,$$

se ne studino l'insieme di definizione, la chiusura e l'esattezza, e se ne determinino, se il caso, le primitive. Si determini poi il suo integrale lungo la curva γ di estremi $(1,0)$ e $(3,0)$ orientata nel verso delle x crescenti.

Svolgimento
Si tratta di una forma differenziale definita su R^2, inoltre calcolando le derivate ad incrocio, risulta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial a(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial(2xe^y-5y)}{\partial y} = 2xe^y-5\\ \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial(x^2e^y-5x)}{\partial x} = 2xe^y-5\end{aligned}$$

la forma differenziale risulta chiusa ed essendo tale in un aperto semplicemente connesso, sarà anche esatta. Calcoliamo la primitiva:

$$\begin{aligned}A(x,y) &= \int(2xe^y-5y)dx = x^2e^y-5xy+g(y)\\ \frac{\partial A(x,y)}{\partial y} &= x^2e^y-5x+g'(y) = x^2e^y-5x\\ &\Downarrow\\ g(y) &= C,\end{aligned}$$

da cui
$$f(x,y) = x^2e^y-5xy+C.$$

da cui segue che

$$\int_\gamma \omega(x,y)ds = f(3,0)-f(1,0) = 3^2-1 = 8$$

Esercizio 7:

Dopo aver studiato la regolarità della curva $\gamma(t) = \left(\frac{3}{4}(t^4+1), \frac{2}{5}\sqrt{6t^5}-2, t+3\right)$ con $t \in [0,1]$, calcolarne la lunghezza.

Svolgimento:

La curva $\gamma : [0,1] \to R^3$ è regolare essendo derivabile ed avendo derivata continua

$$\gamma'(t) = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}(t^4+1)\right), \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{5}\sqrt{6t^5}-2\right), \frac{d}{dt}(t+3)\right) = (3t^3, \sqrt{6t^3}, 1) \neq (0,0,0),$$

per ogni $t \in [0,1]$.

Inoltre per ogni t risulta:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9t^6+6t^3+1} = 3t^3+1,$$

da cui:
$$L(\gamma) = \int_0^1 \left(3t^3+1\right) dt = \frac{7}{4}$$

Esercizio 8:

Calcolare il seguente integrale superficiale:

$$\int_s (1+y)\, d\sigma$$

dove S è la parte di superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ esterna al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Svolgimento:

La formula per il calcolo dell'integrale superficiale è

$$I = \int \int_D g(x,y)\sqrt{1 + |\nabla f|^2} dxdy$$

dove $g(x,y) = 1 + y$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $D = \left\{(x,y) \in R^2 \ : x^2 + y^2 \ \leq 1\right\}$. Si osservi che l'insieme D è stato determinato con l'intersezione tra le due superfici.

In questo caso, essendo $\nabla f = (2x, 2y)$, si ottiene:

$$I = \int_s (1 + y)\, d\sigma = \int \int_D (1 + y) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy$$

Questo integrale doppio può essere facilmente risolto utilizzando le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

essendo $D = \{(\rho, \theta) : \quad 0 \leq \rho \leq 1; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Quindi

$$I = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho\,(1 + \rho \sin\theta) \sqrt{1 + 4\rho^2} d\theta = 2\pi \int_0^1 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{12}\left(1 + 4\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$
$$= 2\pi \left[\frac{1}{12}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right)\right] = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$$

Esercizio 9:

Determinare il valore del seguente integrale doppio

$$\int_D \frac{\log y}{\sqrt{xy^2}} dxdy$$

sul dominio piano del primo quadrante delimitato dalle rette di equazione $x = 4$, $y = 1$ e dalla curva di equazione $y = \sqrt{x}$.

Svolgimento:

Il dominio D è normale tanto rispetto all'asse x, quanto rispetto all'asse y.

Nel primo caso si può espimere come

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4,\ 1 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

quindi si ha (tenendo conto che $y > 0$)

$$\int_D \frac{\log y}{\sqrt{xy^2}} dxdy = \int_1^4 dx \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\log y}{\sqrt{xy^2}} dy = \int_1^4 dx \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\log y}{y} dy = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2}\log^2 y\right]_1^{\sqrt{x}} dx =$$
$$= \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \log^2 \sqrt{x} dx = \int_1^2 \log^2 t dt = \left[t \log^2 t\right]_1^2 - \int_1^2 t \frac{2\log t}{t} dt = \left[t \log^2 t - 2t \log t + 2t\right]_1^2 =$$
$$= 2\log^2 2 - 4\log 2 + 4 - 2 = 2\left(\log^2 2 - 2\log 2 + 1\right) = 2\,(1 - \log 2)^2$$

Nel secondo caso si può espimere come

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le y \le 2,\ y^2 \le x \le 4\}$$

quindi si ha

$$\int_D \frac{\log y}{\sqrt{xy^2}} dxdy = \int_1^2 dy \int_{y^2}^4 \frac{\log y}{\sqrt{xy^2}} dx = \int_1^2 dx \int_{y^2}^4 \frac{\log y}{y} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{\log y}{y} \left[2\sqrt{x}\right]_{y^2}^4 dy =$$

$$= \int_1^2 \frac{2\log y}{y}(2-y)dy = 2\int_1^2 \left(\frac{2\log y}{y} - \log y\right) dy = 2\left[\log^2 y - y\log y + y\right]_1^2 =$$

$$= 2\left(\log^2 2 - 2\log 2 + 2 - 1\right) = 2\left(1 - \log 2\right)^2.$$

Esercizio 10 (Facoltativo):
Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\overrightarrow{F} = \left(2xy + 3z, x + y^2, -xy\right)$$

uscente dal dominio D limitato da

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1$$

Svolgimento:

1. Utilizzando il teorema della divergenza e osservando che:

   $$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = 4y \ \text{ e } \ D = \left\{(x, y, z) \in R^3 \ \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x, \ \ 0 \le z \le 1 - x - y\right\}$$

   si ha:

   $$Flusso = \int_{\partial D} \left(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{n}\right) d\sigma = \int\int\int_D \operatorname{div} \overrightarrow{F} dxdydz = \int\int\int_D 4ydxdydz =$$

   $$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} 4ydz\right) dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(4y\left(1 - x - y\right)\right) dy\right) dx = 4\int_0^1 \left[(1-x)\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} d$$

   $$= 4\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = \left[-\frac{(1-x)^4}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$