

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Prova scritta di Matematica II
12 Gennaio 2011

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU risolvano i quesiti numero 3-4-5-6-7-8-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (con geometria) risolvano i quesiti numero
1-2-4-5-9

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (senza geometria) risolvano i quesiti numero
4-5-7-9

1. In \mathbb{R}^4 si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$V = \langle (1, 0, -1, 2), (3, 1, 0, -2), (5, 1, -2, 2) \rangle, \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 3y + 2t = 0\}$$

- (a) direcalcolare la dimensione e una base ortonormale di V ;
- (b) calcolare la dimensione e una base di $V + W^\perp$;
- (c) dire se $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

2. Data l'endomorfismo f di \mathbb{R}^3 , la cui matrice rappresentativa è data da:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

- (a) calcolare la dimensione e una base di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$;
- (b) dire se f è diagonalizzabile su \mathbb{R} e su \mathbb{C} ;
- (c) dire se f è ortogonalmente diagonalizzabile su \mathbb{R} ;
- (d) calcolare una base per ogni autospazio reale;
- (e) calcolare l'inversa di A , se possibile.

3. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(7n+5)}{n^2+3}.$$

4. Determinare i punti di massimo e minimo assoluti e relativi della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^2}.$$

5. Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

- (a) $y'''' - 6y''' + 10y'' - 6y' + 9y = \sqrt[8]{81} \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x$;
- (b) $x(2y' - 1) + 2y(1 - 2y') - 2(3y' + 8) = 0$.

6. Dopo aver studiato la regolarità della curva $\gamma(t) = \left(\frac{3}{2}(t^4 + 1), \frac{2}{5}\sqrt{6t^5} - 2, t + 3 \right)$ con $t \in [0, 1]$, calcolarne la lunghezza.

7. Assegnata nel piano la forma differenziale lineare seguente

$$\omega(x, y) = (2xe^y - 5y)dx + (x^2e^y - 5x)dy,$$

se ne studino l'insieme di definizione, la chiusura e l'esattezza, e se ne determinino, se il caso, le primitive. Si calcoli poi il suo integrale lungo la curva γ di estremi $(1, 0)$ e $(3, 0)$ orientata nel verso delle x crescenti.

8. Calcolare il seguente integrale superficiale:

$$\int_S (1 + y) d\sigma,$$

dove S è la parte di superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ esterna al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

9. Determinare il valore del seguente integrale doppio

$$\iint_D \frac{\log y}{\sqrt{xy^2}} dx dy$$

sul dominio piano del primo quadrante delimitato dalle rette di equazione $x = 4$, $y = 1$ e dalla curva di equazione $y = \sqrt{x}$.

10. (Facoltativo) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (2xy + 3z, x + y^2, -xy),$$

uscente dal dominio D limitato da

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1.$$