UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Svolgimento della prova scritta - fuori corso - di Matematica II
11 Novembre 2010

Esercizio 1
In $\mathbb{R}^3$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - 2y + z = x - z = 0\right\}, \quad W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - y + z = 0\right\}$$

a. calcolare la dimensione e una base di $V^\perp$;

b. la dimensione e una base di $V + W$;

c. dire se $u = (2, -2, 1) \in V^\perp$ e in tal caso calcolare le componenti di u rispetto alla base trovata al punto a).

Svolgimento

a. Osserviamo che il sistema rappresentativo di V può anche essere scritto come

$$V : \begin{cases} (1, -2, 1) \cdot (x, y, z) = 0 \\ (1, 0, -1) \cdot (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Ne segue che i vettori dei coefficienti appartengono a $V^\perp$ ed, essendo non proporzionali tra loro, sono linearmente indipendenti e quindi proprio una base.

b. Ricordando che $V + W = \langle B_V \cup B_W \rangle$, andiamo a calcolare una base di V e una di W.Abbiamo già osservato al punto precedente che il rango della matrice dei coefficienti del sistema rappresentativo di V è 2, ne segue che $\dim V = 3 - 2 = 1$ e possiamo considerare il sistema lineare ridotto

$$\begin{cases} x - 2y = -z \\ x = z \end{cases} \Longrightarrow V = \{(z, z, z)\,|z \in \mathbb{R}\}$$

per cui $B_V = \{(1, 1, 1)\}$.Dal sistema rappresentativo di W, otteniamo immediatamente $W = \{(y - z, y, z)!y, z \in \mathbb{R}\}$ da cui $B_W = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.
Osservando che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

otteniamo che $B_{v+W} = B_V \cup B_W$.

c. Osservando che

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

concludiamo che $u \notin V^\perp$.

Esercizio 2
Data l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$, la cui matrice rappresentativa è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

1. (a) calcolare la dimensione e una base di $\ker f$;
   (b) calcolare la dimensione e una base ortonormale di $\operatorname{Im} f$;
   (c) dire se l'endomorfismo dato è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

Svolgimento

a. Il nucleo di f è rappresentato da

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Osservando che $\det A = 0$ e che $|A_{2,3;2,3}| \neq 0$, abbiamo

$$\ker f : \begin{cases} y + z = -2x \\ z = -3x \end{cases} \Longrightarrow \ker f = \{(x, x, -3x)\,|x \in \mathbb{R}\}$$

da cui si ricava che $\dim \ker f = 1$ e una sua base è $\{(1, 1, -3)\}$.

b. L'immagine di f è generato dalle colonne di A e una base è data dalle colonne linearmente indipendenti, quindi per quanto osservato al punto a), abbiamo che $\dim \operatorname{Im} f = 2$ e una sua base è $\{(-1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Applichiamo a questa il procedimento di Gram-Schmidt e otteniamo$\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
u &= \frac{(-1,1,0)}{|(-1,1,0)|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\
v' &= (0,1,1) - \left[(0,1,1) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right] \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \\
&= (0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \\
&= (0,1,1) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = \\
&= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \\
v &= \frac{v'}{|v'|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)
\end{aligned}$$

quindi una base ortonormale è data da $\{u, v\}$.

c. Calcoliamo gli autovalori di A attraverso l'equazione caratteristica

$$|A - hI| = -h^3 + 3h^2 - 5h$$

quindi A possiede un solo autovalore reale $h = 0$, ne segue che A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (per il teorema principale di caratterizzazione della diagonalizzazione), ma ha tre autovalori complessi 0, $\frac{3+i\sqrt{11}}{2}$, $\frac{3-i\sqrt{11}}{2}$, quindi è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ (per la condizione sufficiente della diagonalizzabilità).

Esercizio 3

Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{2\,(n+4)}$$

Svolgimento:

Verifichiamo se la serie soddisfa la condizione necessaria di convergenza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{2\,(n+4)} = 0.$$

A questo punto osserviamo che in base al criterio del confronto asintotico risulta:

$$\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{2\,(n+4)} \sim \left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ossia la serie di partenza confrontata con quella armonica generalizzata converge.

Esercizio 4

Determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione

$$f(x,y) = f(x,y) = e^{xy}(2x - 3y).$$

Svolgimento

Calcoliamo il gradiente della funzione

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) \\ &= \left(e^{xy}\left(-3y^2 + 2xy + 2\right), e^{xy}\left(-2x^2 + 3yx + 3\right)\right). \end{aligned}$$

Imponiamo che il gradiente sia nullo allo scopo di calcolare i punti stazionari della funzione:

$$\begin{cases} -3y^2 + 2xy + 2 = 0 \\ -2x^2 + 3yx + 3 = 0 \end{cases}$$

che risultano rispettivamente $A(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}), B(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3})$.
Calcolando l'hessiano risulta che entrambi i punti sono di sella
Esercizio 5
Risolvere i seguenti problemi:

a. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y''' - 3y'' + 5y' - 15y = 8xe^{3x} + e^2 \cos 5x$$

b. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y(3y' + 2) + x(2y' - 1) - 8y' - 3 = 0$$

Svolgimento

a. Calcolare l'integrale generale della equazione differenziale seguente:

$$y''' - 3y'' + 5y' - 15y = 8xe^{3x} + e^2 \cos 5x,$$

consideriamo l'equazione omogenea associata:

$$y''' - 3y'' + 5y' - 15y = 0$$

da cui l'equazione caratteristica risulta:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 15 = 0$$

le cui soluzioni sono $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{5}, \lambda_3 = 3$; di conseguenza la soluzione della omogenea sarà:

$$y_o(x) = C_1 e^{3x} + C_2 \cos \sqrt{5}x + C_2 \sin \sqrt{5}x.$$

A questo punto occorre individuare la soluzione particolare, che sarà del tipo:

$$y_p(x) = x(Ax + B)e^{3x} + C \cos 5x + D \sin 5x$$

calcoliamone le derivate:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= Be^{3x} - 5C \sin 5x + 5D \cos 5x + 2Axe^{3x} + 3Bxe^{3x} + 3Ax^2 e^{3x} \\
y_p''(x) &= 2Ae^{3x} - 25C \cos 5x + 6Be^{3x} - 25D \sin 5x + 12Axe^{3x} + 9Bxe^{3x} + 9Ax^2 e^{3x} \\
y_p'''(x) &= 18Ae^{3x} + 27Be^{3x} + 125C \sin 5x - 125D \cos 5x + 54Axe^{3x} + 27Bxe^{3x} + 27Ax^2 e^{3x}
\end{aligned}$$

da cui segue

$$18Ae^{3x}+27Be^{3x}+125C\sin 5x-125D\cos 5x+54Axe^{3x}+27Bxe^{3x}+27Ax^2e^{3x}+$$
$$-3(2Ae^{3x}-25C\cos 5x+6Be^{3x}-25D\sin 5x+12Axe^{3x}+9Bxe^{3x}+9Ax^2e^{3x})+$$
$$+5(Be^{3x}-5C\sin 5x+5D\cos 5x+2Axe^{3x}+3Bxe^{3x}+3Ax^2e^{3x})-15(x(Ax+B)e^{3x}+C\cos 5x+D\sin 5x)=$$
$$\Downarrow$$
$$60C\cos 5x+12Ae^{3x}+14Be^{3x}+100C\sin 5x-100D\cos 5x+60D\sin 5x+28Axe^{3x}=e^2\cos 5x+$$

ossia:

$$\begin{cases} 60C-100D=e^2 \\ 100C+60D=0 \\ 12A+14B=0 \\ 28A=8 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $A=\frac{2}{7}, B=-\frac{12}{49}, C=\frac{3}{680}e^2, D=-\frac{1}{136}e^2$, che sostituite nella soluzione particolare si ottiene la soluzione generale seguente:

$$y(x)=C_1e^{3x}+C_2\cos\sqrt{5}x+C_2\sin\sqrt{5}x+x(\frac{2}{7}x-\frac{12}{49})e^{3x}+\frac{3}{680}\cos 5x-\frac{1}{136}e^2\sin 5x.$$

b. Calcolare l'integrale generale della equazione differenziale seguente:

$$y(3y'+2)+x(2y'-1)-8y'-3=0$$

Innanzitutto, possiamo riscrivere l'equazione come segue:

$$\begin{aligned} y'\,(2x+3y-8) &= x-2y+3 \\ &\Downarrow \\ y' &= \frac{x-2y+3}{2x+3y-8} \end{aligned}$$

le due rette non sono parallele, ma hanno il seguente punto in comune:

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 2x+3y-8=0 \end{cases} \Rightarrow P(1,2),$$

da cui

$$\begin{cases} \xi=x-1 \\ \eta=y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\xi+1 \\ y=\eta+2 \end{cases}$$

che sostituendo nella equazione differenziale assegnata, diviene:

$$\begin{aligned}\eta' &= \frac{\xi+1-2(\eta+2)+3}{2(\xi+1)+3(\eta+2)-8};\\ &\Downarrow\\ \eta' &= \frac{\xi-2\eta}{2\xi+3\eta}\end{aligned}$$

dividendo tutto per ξ, otteniamo

$$\eta' = \frac{1-2\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}{2+3\left(\frac{\eta}{\xi}\right)},$$

posto $z = \frac{\eta}{\xi}$, si ha $\eta = z\xi$, per cui $\eta' = z + z'\xi$

$$\begin{aligned}z + z'\xi &= \frac{1-2z}{2+3z};\\ &\Downarrow\\ z'\xi &= -\frac{4z+3z^2-1}{3z+2}\end{aligned}$$

di conseguenza trattandosi di una equazione a variabili separabili risulta:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{4z+3z^2-1}{3z+2}\right)^{-1} dz &= \frac{1}{\xi}d\xi\\ &\Downarrow\\ \int\left(-\frac{3z+2}{4z+3z^2-1}\right) dz &= \int\frac{1}{\xi}d\xi\\ &\Downarrow\\ -\frac{1}{2}\ln\left(z^2+\frac{4}{3}z-\frac{1}{3}\right) &= \ln\xi\\ &\Downarrow\\ \left(z^2+\frac{4}{3}z-\frac{1}{3}\right)^{-1/2} &= \xi\\ &\Downarrow\\ \left(\left(\frac{x-1}{y-2}\right)^2+\frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{y-2}\right)-\frac{1}{3}\right)^{-1/2} &= x-1\end{aligned}$$

Esercizio 6:
Si calcoli il valore del seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt{2-y}\, ds$$

lungo la curva (cicloide) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

relativamente all'arco di base $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$.

Svolgimento

Si ha $ds = \sqrt{2(1-\cos t)}dt$, quindi l'integrale diventa

$$\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sqrt{2-(1-\cos t)}\sqrt{2(1-\cos t)}dt = \sqrt{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sqrt{1-\cos^2 t}dt = \sqrt{2}[-\cos t]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \sqrt{6},$$

dove si usata la relazione $\sqrt{\sin^2 t} = \sin t$, valida nell'intervallo considerato, dove $\sin t > 0$.

Esercizio 7:

Assegnata nel piano la forma differenziale lineare seguente

$$\omega(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{4-x-y}}\right)dx + \left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{4-x-y}}\right)dy,$$

se ne studino l'insieme di definizione, la chiusura e l'esattezza, e se ne determinino, se il caso, le primitive. Si determini poi il suo integrale lungo il segmento orientato di estremo iniziale $A \equiv (2,1)$ ed estremo finale $B \equiv (1,2)$.

Svolgimento:

L'insieme di definizione il triangolo di vertici OCD, con $C \equiv (4,0)$ e $D \equiv (0,4)$. La forma chiusa, dato che

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{(4-x-y)^3}},$$

inoltre la forma esatta dato che il dominio semplicemente connesso. Le primitive sono date da

$$f(x,y) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - 2\sqrt{4-x-y} + c.$$

Il valore dell'integrale nullo.

Esercizio 8:

Calcolare il seguente integrale superficiale:

$$\int_s y d\sigma$$

dove S è la superficie di equazioni

$$z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (x,y) \in D$$

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 2; \quad x \ge 0, \quad y \ge 0\right\}$$

Svolgimento:
La formula per il calcolo dell'integrale superficiale è

$$I = \int\int_D g(x,y)\sqrt{1+|\nabla f|^2}dxdy$$

dove $g(x,y) = y$ e $f(x,y) = z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
In questo caso, essendo $\nabla f = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, si ottiene:

$$I = \int_s y d\sigma = \int\int_D y\sqrt{\frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy$$

Questo integrale doppio può essere risolto utilizzando le coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

essendo $D = \left\{(\rho,\theta): \quad 1 \le \rho \le 2; \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$. Quindi

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\sin\theta\sqrt{1+\rho^2}d\theta = [-\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}\left(1+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{3}\left[(5)^{\frac{3}{2}} - (2)^{\frac{3}{2}}\right] \end{aligned}$$

Esercizio 9:
Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}|x|\,dxdy$$

dove il dominio D è il seguente :

$$D = \left\{(x,y) \in R^2: \ 4 \le x^2+y^2 \le 25, \quad y \ge 0\right\}$$

Svolgimento:
L'integrale può essere calcolato utilizzando le coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

che trasformano l'insieme D in D_1.

$$D_1 = \left\{(\rho,\theta) \in R^2: \ 2 \le \rho \le 5, \quad 0 \le \theta \le \pi\right\}$$

Quindi

$$I = \int\int_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}|x|\,dxdy =$$

$$= \int\int_{D_1} e^{\rho}\rho\left|\rho\cos\theta\right| d\rho d\theta = \int_2^5 e^{\rho}\rho^2\left(\int_0^{\pi}\left|\cos\theta\right| d\theta\right)d\rho = \left[e^{\rho}\left(\rho^2-2\rho+2\right)\right]_2^5\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\cos\theta\right)d\theta\right]$$

$$= \left[17e^5-2e^2\right]\left[\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right] = 2e^2\left[17e^3-2\right]$$

Si osservi che l'integrale $\int e^{\rho}\rho^2 d\rho$ è svolto per parti, mentre per l'integrale $\int\left|\cos\theta\right| d\theta$ si tiene conto del segno della funzione $f\left(\theta\right)=\cos\theta$.