UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Prova scritta Fuori Corso di Matematica II
11 Novembre 2010

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU risolvano i quesiti numero 3-4-5-6-7-8-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (con geometria) risolvano i quesiti numero 1-2-4-5-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (senza geometria) risolvano i quesiti numero 4-5-7-9

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - 2y + z = x - z = 0\right\}, \quad W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - y + z = 0\right\}$$

a. calcolare la dimensione e una base di $V^{\perp}$;

b. la dimensione e una base di $V + W$;

c. dire se $u = (2, -2, 1) \in V^{\perp}$ e in tal caso calcolare le componenti di u rispetto alla base trovata al punto a).

2. Data l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$, la cui matrice rappresentativa è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a. calcolare la dimensione e una base di $\ker f$;

b. calcolare la dimensione e una base ortonormale di $\operatorname{Im} f$;

c. dire se l'endomorfismo dato è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

3. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{2\,(n+4)}$$

4. Determinare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione:

$$f(x,y) = e^{xy}(2x - 3y).$$

5. Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali

a. $y''' - 3y'' + 5y' - 15y = 8xe^{3x} + e^2 \cos 5x$

b. $y(3y' + 2) + x(2y' - 1) - 8y' - 3 = 0$

6. Si calcoli il valore del seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt{2-y}\, ds$$

lungo la curva (cicloide) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

relativamente all'arco di base $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$.

7. Assegnata nel piano la forma differenziale lineare seguente

$$\omega(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{4-x-y}}\right) dx + \left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{4-x-y}}\right) dy,$$

se ne studino l'insieme di definizione, la chiusura e l'esattezza, e se ne determinino, se il caso, le primitive. Si determini poi il suo integrale lungo il segmento orientato di estremo iniziale $A \equiv (2,1)$ ed estremo finale $B \equiv (1,2)$.

8. Calcolare il seguente integrale superficiale:

$$\int_s y d\sigma$$

dove S è la superficie di equazioni

$$z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad\qquad (x,y) \in D$$

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\right\}$$

9. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, |x|\, dxdy$$

dove il dominio D è il seguente :

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 :\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25, \quad y \geq 0\right\}$$

10. (Facoltativo) Studiare la convergenza della serie di funzioni e calcolarne la somma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+4)} \left(\frac{4}{\sqrt{3}\sin x \cos x}\right)^{n+1}$$