

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO**  
**Prova scritta Fuori Corso di Matematica II**  
**14 Ottobre 2010**

*Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU risolvono i quesiti numero 3-4-5-6-7-8-9*  
*Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (con geometria) risolvono i quesiti numero*  
*1-2-4-5-9*  
*Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (senza geometria) risolvono i quesiti numero*  
*4-5-7-9*

1. In  $\mathbb{R}^3$  si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:

$$V = \langle (1, 2, -1), (-2, 3, -1) \rangle, \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

- a. calcolare una rappresentazione cartesiana di  $V$ ;
- b. calcolare la dimensione e una base ortonormale di  $W$ ;
- c. la dimensione e una base di  $V \cap W$ .

2. Dato l'endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^3$ , la cui matrice rappresentativa è data da:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

- a. calcolare la dimensione e una base di  $\ker f$  e  $\operatorname{Im} f$ ;
- b. dire se l'endomorfismo dato è diagonalizzabile e/o ortogonalmente diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ ;
- c. calcolare, se possibile, una matrice di diagonalizzazione di  $A$ .

3. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{3n^2+2n}{3n^2-1}} - \frac{1}{2} \right]$$

4. Determinare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione:

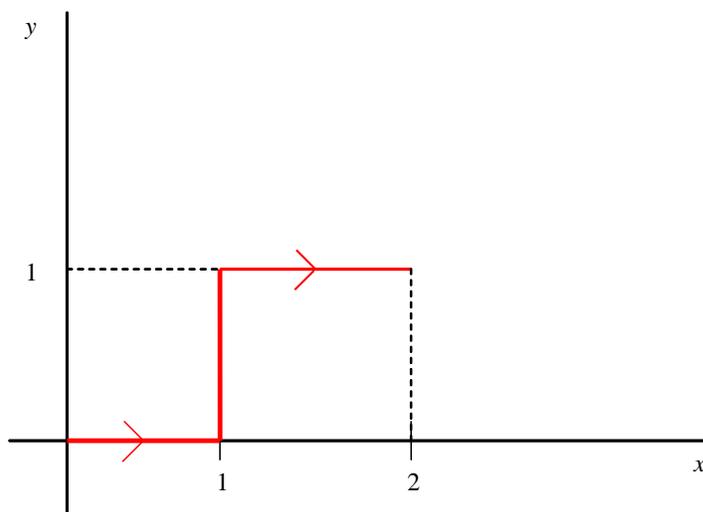
$$f(x, y) = \frac{2}{3} (x + y) (-4xy + 4x^2 + 4y^2 - 9).$$

5. Risolvere i seguenti problemi:

- (a) EQUAZIONE DIFFERENZIALE A COEFFICIENTI COSTANTI
- (b) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y' = (5x + 3y + 2)^2.$$

6. INTEGRALE CURVILINEO



7. Assegnata la seguente forma differenziale

$$\omega(x, y) = (3xy + e^x)dx + 2ye^{y^2} dy$$

dopo averne verificato l'esattezza nel proprio dominio calcolarne l'integrale lungo la curva  $\gamma$  che congiunge il punto  $(0, 0)$  con il punto  $(2, 1)$  così come rappresentato in figura:

8. Calcolare il seguente integrale superficiale:

$$\int_S x^2 d\sigma$$

dove  $S$  è la superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \leq 0; \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}$$

9. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \int_D x |y| dx dy$$

dove il dominio  $D$  è il seguente :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1, \quad x > 0\}$$

10. (Facoltativo) Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$$

nel punto  $P(1, 2)$  e lungo la direzione della bisettrice del primo e terzo quadrante nel verso delle ascisse positive.