UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Svolgimento della prova scritta di Matematica II
14 Settembre 2010

Esercizio 1
Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x - y = z - t = 0\right\},$$

$$W = \langle(1, 2, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (2, 1, 0, 1)\rangle .$$

a. calcolare la dimensione ed una base di $W + V$;

b. dire se il vettore $(-1, -1, 4, -2)$ appartiene a $V \cap W$.

Svolgimento

a. Calcoliamo una base di V risolvendo il sistema dato otteniamo $B_V = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$. Osserviamo che i generatori dati per W sono linearmente indipendenti, quindi sono una base di W . Unendo le due basi, otteniamo un sistema di generatori per $W + V$. Osservando che il rango della matrice avente per righe i generatori trovati è 4, si conclude che $W + V = \mathbb{R}^4$ e pertanto una sua base è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

b. Osserviamo che il vettore dato non appartiene a V poiché non soddisfa la seconda delle equazioni di V, quindi non appartiene a $V \cap W$.

Esercizio 2

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y + z, 3x + 4y)$$

.

a. Calcolare la dimensione ed una base di $\ker f$ e di $\operatorname{Im} f$.

b. Dire se f è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ e se f è ortogonalmente diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

c. Calcolare una base per ciascun autospazio.

Svolgimento

a. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
la matrice canonica di f. Si ha $rkA = 2 = \dim \operatorname{Im} f$ (basta osservare che $\det A = 0$ e $|A_{2,3;2,3}| \neq 0$), quindi una base di $\operatorname{Im} f$ è data dalle ultime due colonne di A. Inoltre $\dim \ker f = 3 - rkA = 1$ e per trovare una sua base risolviamo il sistema lineare ridotto
$$\begin{cases} 3y + 2z = -2x \\ 4y = -3x \end{cases}$$
che ha come soluzioni $\left(x, -\frac{3}{4}x, \frac{1}{8}x\right)$, per $x \in \mathbb{R}$, quindi una base è costituita dal vettore $(8, -6, 1)$.

b. Gli autovalori della matrice A sono 4 e 0 rispettivamente di molteplicità algebrica 1 e 2. Osservando che $rkA = 2$, si ha $m_g(0) = 3-2 = 1 \neq m_a(0)$, da cui si conclude che f non è diagonalizzabile né su $\mathbb{R}$ né su $\mathbb{C}$, né quindi può essere ortogonalmente diagonalizzabile.

c. L'autospazio relativo all'autovalore 0 coincide col $\ker f$, già calcolato al punto a). L'autospazio relativo all'autovalore 4 corrisponde allo spazio delle soluzione del sistema lineare omogeneo relativo alla matrice
$$A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$
il cui rango è 2 (basta osservare che $|A_{1,2;1,2}| \neq 0$), perciò $\dim V_4 = 3-2 = 1$ e per trovare una sua base risolviamo il sistema lineare ridotto
$$\begin{cases} -3x + y = z \\ 2x - y = -2z \end{cases}$$
le cui soluzioni sono $(z, 4z, z)$, per $z \in \mathbb{R}$, quindi una base è costituita dal vettore $(1, 4, 1)$.

Esercizio 3

Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1\right)^{4e^{i\pi}} + (\sqrt{2} - \sqrt{6}) \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})}{n}.$$

Svolgimento:

Prima di verificare la condizione necessaria di convergenza di una serie numerica, conviene, utilizzando la formula di Eulero e la formula di addizione del seno, semplificare l'espressione del temine generale della serie:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right)^{4e^{i\pi}} + (\sqrt{2}-\sqrt{6})\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})}{n} = \frac{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right)^{-4}-1}{n},$$

da cui risulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right)^{-4}-1}{n}.$$

Verifichiamo la validità della condizione necessaria:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right)^{-4}-1}{n} = 0.$$

A tal punto utilizzando il criterio del confronto asintotico con la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

risulta, posto $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right)^{-4}-1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right)^{-4}-1}{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Posto $m = \frac{1}{n}$ si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1\right)^{-4}-1}{\frac{1}{n}} &= \lim_{m\to 0} \frac{\left(m^2+m+1\right)^{-4}-1}{m} \\ &= \lim_{m\to 0} \frac{\left(m^2+2m+1-m\right)^{-4}-1}{m} \\ &= \lim_{m\to 0} \frac{\left(\frac{(m+1)^2-1}{m}m+1-m\right)^{-4}-1}{m};\end{aligned}$$

utilizzando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^k-1}{x} = k$$

risulta

$$\lim_{m\to 0} \frac{(2m+1-m)^{-4}-1}{m} = \lim_{m\to 0} \frac{(m+1)^{-4}-1}{m} = -4.$$

In definitiva in base al criterio del confronto asintotico la serie converge.
Esercizio 4

Determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione

$$f(x,y) = e^{\left(x^3-2x\right)(y+1)}$$

Svolgimento
Calcoliamo il gradiente della funzione

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) \\ &= \left(e^{\left(x^3-2x\right)(y+1)}\left(3x^2-2\right)(y+1), e^{\left(x^3-2x\right)(y+1)}x(x^2-2)\right). \end{aligned}$$

Imponiamo che il gradiente sia nullo allo scopo di calcolare i punti stazionari della funzione:

$$\begin{cases} e^{\left(x^3-2x\right)(y+1)}\left(3x^2-2\right)(y+1) = 0 \\ e^{\left(x^3-2x\right)(y+1)}x(x^2-2) = 0 \end{cases}$$

che risultano $A(0,-1)$, $B(-\sqrt{2},-1), C(\sqrt{2},-1)$.
Calcoliamo l'hessiano:

$$H(x,y) = e^{\left(x^3-2x\right)(y+1)}\overline{H}(x,y),$$

dove

$$\begin{aligned} \overline{H}(x,y) &= \begin{vmatrix} (y+1)\left(6x+4y-12x^2y+9x^4y-12x^2+9x^4+4\right) & \left(3x^2-2\right)\left(x^3y-2x-2xy+x^3+1\right) \\ \left(3x^2-2\right)\left(x^3y-2x-2xy+x^3+1\right) & x^2\left(x^2-2\right)^2 \end{vmatrix}, \\ &\Downarrow \\ H(x,y) &= e^{\left(x^3-2x\right)(y+1)}\left(16x-32x^3y+36x^5y-12x^7y+16xy+12x^2-32x^3-9x^4+36x^5-12x^7-4\right) \end{aligned}$$

da cui segue che, essendo

$$\begin{aligned} H(A) &= -4 \\ H(B) &= H(C) = -16 \end{aligned}$$

i punti stazionari A, B, C rappresentano per la funzione dei punti di sella.

Esercizio 5
Risolvere i seguenti problemi:

a. Analizzando il polinomio caratteristico relativo alla seguente equazione differenziale

$$y''' - 4y'' + 3y' - 12y = e^{2x}\cos(\frac{\pi}{6} + x)$$

verificare che $y(x) = \cos 3x$ è una soluzione e calcolarne, inoltre, l'integrale generale.

b. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\left(\frac{2xy'+y}{x}\right) + y^3(x) = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases} .$$

Svolgimento

a. Riscriviamo l'equazione come segue:

$$y''' - 4y'' + 3y' - 12y = e^{2x}(\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x - \frac{1}{2}\sin x).$$

Affinché $y(x) = \cos 3x = e^{0x}(\cos 3x)$ sia soluzione dell'equazione differenziale deve risultare che $\overline{\lambda}_{1,2} = \pm 3i + 0$ siano radici del polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 12,$$

il quale ammette le seguenti radici: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{3}i$; da cui $P(\overline{\lambda}_{1,2}) \neq 0$, ossia $y(x) = \cos 3x$ non è soluzione.

Calcoliamo l'integrale generale della equazione differenziale, in particolare la soluzione della omogenea risulta:

$$y_o(x) = c_1 e^{4x} + c_2\cos\sqrt{3}x + c_3\sin\sqrt{3}x$$

calcoliamo la particolare:

$$y_p = e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right)$$

da cui

$$\begin{aligned} y_p' &= \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right)\right) \\ &= e^{2x}\left(2A\cos x + B\cos x - A\sin x + 2B\sin x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' &= \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\left(2A\cos x + B\cos x - A\sin x + 2B\sin x\right)\right) \\ &= e^{2x}\left(3A\cos x + 4B\cos x - 4A\sin x + 3B\sin x\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_p''' &= \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\left(3A\cos x + 4B\cos x - 4A\sin x + 3B\sin x\right)\right) \\
&= e^{2x}\left(2A\cos x + 11B\cos x - 11A\sin x + 2B\sin x\right)
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
&e^{2x}\left(2A\cos x + 11B\cos x - 11A\sin x + 2B\sin x\right) - 4(e^{2x}\left(3A\cos x + 4B\cos x - 4A\sin x + 3B\sin x\right))+ \\
&+3(e^{2x}\left(2A\cos x + B\cos x - A\sin x + 2B\sin x\right)) - 12e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right) = e^{2x}\cos(\tfrac{\pi}{6} + x)
\end{aligned}
$$

ossia

$$
\begin{gathered}
2\sin x(A - 8B) - 2\cos x(B + 8A) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,(\cos x) - \tfrac{1}{2}\sin x \\
\Downarrow \\
\left\{\begin{array}{l} A - 8B = -\frac{1}{4} \\ B + 8A = -\frac{1}{4}\sqrt{3} \end{array}\right. ,
\end{gathered}
$$

le cui soluzioni sono $A = -\frac{2}{65}\sqrt{3} - \frac{1}{260}$, $B = \frac{2}{65} - \frac{1}{260}\sqrt{3}$, da cui segue

$$
y(x) = c_1 e^{4x} + c_2\cos\sqrt{3}x + c_3\sin\sqrt{3}x + e^{2x}\left[\left(-\frac{2}{65}\sqrt{3} - \frac{1}{260}\right)\cos x + \left(\frac{2}{65} - \frac{1}{260}\sqrt{3}\right)\sin x\right].
$$

b. Risolviamo l'equazione differenziale

$$
2y'(x) + \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}y^3(x) = 0;
$$

si tratta di una equazione di Bernoulli in cui $\alpha = 3$. Dividiamo tutto per $y^3(x)$ ed otteniamo

$$
\frac{2y'(x)}{y^3(x)} = -\frac{1}{y^2(x)x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},
$$

poniamo $z(x) = y^{-2}(x)$, da cui essendo $z'(x) = -2y^{-3}(x)y'(x)$ risulta

$$
-z'(x) = -\frac{z(x)}{x} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow z'(x) = \frac{z(x)}{x} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.
$$

Trattandosi di una equazione lineare del primo ordine individuiamo i coefficienti $a(x) = \frac{1}{x}$ e $b(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ da cui essendo $A(x) = \int \frac{1}{x}dx = \log|x|$, e supposto $x > 0$ risulta

$$
\begin{aligned}
z(x) &= e^{\log x}\left(\int e^{-\log x}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx + c\right) \\
&= x\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c\right] \\
&\Downarrow \\
y(x) &= z^{-1/2}(x) = \left\{x\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c\right]\right\}^{-1/2}
\end{aligned}
$$

calcoliamo

$$\begin{aligned} y(1) &= \left\{\left[\ln\left(1+\sqrt{1+1}\right)+c\right]\right\}^{-1/2} \\ &= \left[\ln(1+\sqrt{2})+c\right]^{-1/2}, \end{aligned}$$

da cui essendo

$$\left[\ln(1+\sqrt{2})+c\right]^{-1/2} = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{4} - \ln\left(\sqrt{2}+1\right),$$

segue

$$y(x) = \left\{x\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{1}{4}-\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]\right\}^{-1/2}.$$

Esercizio 6:
Determinare il valore dell'integrale

$$\int_\gamma \sqrt{1+x-y^2}\, ds,$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}t^2 \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Svolgimento
Si ha

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2}t \\ y'(t) = \cos t \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad ds = \sqrt{\frac{1}{4}t^2 + \cos^2 t}\, dt$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_\gamma \sqrt{1+x-y^2}\, ds &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{1}{4}t^2-\sin^2 t}\sqrt{\frac{1}{4}t^2+\cos^2 t}\, dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}t^2+\cos^2 t\right) dt = \frac{1}{96}\pi\left(\pi^2+24\right). \end{aligned}$$

Esercizio 7:
Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$\overline{V}\,(x,y) = \left(e^{\frac{x^2}{y^2}}\frac{2x}{y}, e^{\frac{x^2}{y^2}}\left(1-\frac{2x^2}{y^2}\right)\right)$$

per spostare un corpo di massa unitaria lungo la circonferenza $x^2-4x+y^2-6y+12=0$ a partire dal punto $P=(3,3)$ al punto $P'\,(2,4)$.

Svolgimento:

Il campo vettoriale è definito in $\Omega = \left\{(x, y) \in R^2 : \quad y \neq 0\right\}$ che è un insieme semplicemente connesso.

Inoltre si ha:
$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial x} = -e^{\frac{x^2}{y^2}}\left(\frac{2x}{y^2} + \frac{4x^3}{y^4}\right)$$
quindi il campo è conservativo (o equivalentemente la forma differenziale $\omega(x, y) = e^{\frac{x^2}{y^2}} \frac{2x}{y} dx + e^{\frac{x^2}{y^2}}\left(1 - \frac{2x^2}{y^2}\right) dy$ è esatta).

Il potenziale (o primitiva della forma) è $F(x, y) = e^{\frac{x^2}{y^2}} y + c$.

Il lavoro si ottiene come differenza del potenziale:
$$L = F(2, 4) - F(3, 3) = 4e^{\frac{1}{4}} - 3e.$$

Esercizio 8:

Determinare il valore dell'integrale
$$\int_S \frac{z}{\sqrt{1 + \cos^2\sqrt{x^2 + y^2}}}\, d\sigma,$$
dove S è la superficie di equazioni parametriche:
$$\begin{cases} x(u, v) = v\cos u \\ y(u, v) = v\sin u \\ z(u, v) = \sin v \end{cases} \qquad (u, v) \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]^2.$$

Svolgimento

Si ha
$$\mathbf{t}_u = \frac{\partial x_i}{\partial u}\mathbf{e}_i = -v\sin u\,\mathbf{e}_1 + v\cos u\,\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{t}_v = \frac{\partial x_i}{\partial v}\mathbf{e}_i = \cos u\,\mathbf{e}_1 + \sin u\,\mathbf{e}_2 + \cos v\,\mathbf{e}_3$$
da cui
$$\mathbf{n} = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -v\sin u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & \cos v \end{vmatrix} = v\cos v\cos u\,\mathbf{e}_1 + v\cos v\sin u\,\mathbf{e}_2 - v\,\mathbf{e}_3$$
$$|\mathbf{n}| = \sqrt{v^2(\cos^2 v + 1)}$$
quindi
$$\int_S \frac{z}{\sqrt{1 + \cos^2\sqrt{x^2 + y^2}}}\, d\sigma = \int_D \frac{\sin v}{\sqrt{1 + \cos^2\sqrt{v^2}}}\sqrt{v^2(\cos^2 v + 1)}\, du\, dv =$$
$$= \int_D v\sin v\, du\, dv = \int_{\pi/6}^{\pi/3} du \int_{\pi/6}^{\pi/3} v\sin v\, dv = [u]_{\pi/6}^{\pi/3}[-v\cos v + \sin v]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{1}{12}\sqrt{3}\pi - \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$$

Esercizio 9:
Determinare il valore dell'integrale

$$\int_D \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}\,dx\,dy$$

sul dominio piano delimitato dalla retta $x = 1$, dalla bisettrice del 1° quadrante e dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Svolgimento

Tenendo conto che

$$x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \rho\cos\theta = 1$$

si ha in coordinate polari

$$\int_D \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}\,dx\,dy = \int_{D'} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^5}\,\rho d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_1^{1/\cos\theta} \frac{\cos^2\theta}{\rho^2}\,d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \left[-\frac{1}{\rho}\right]_1^{1/\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\,(1-\cos\theta)\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left(\cos^2\theta - \cos^3\theta\right) d\theta = \left[\frac{1}{2}\left(\theta + sin\theta\cos\theta\right) - \sin\theta + \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{8}\pi - \frac{5}{12}\sqrt{2} + \frac{1}{4}.$$

Esercizio 10:
Stabilire per quali valori di k la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^k & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

è differenziabile nel proprio dominio.
Svolgimento
Prima di studiare la differenziabilità, analizziamo la continuità della funzione:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^k = \begin{cases} 0 & se \quad k > 0 \\ +\infty & se \quad k < 0 \end{cases},$$

di conseguenza la funzione risulta continua solo nel caso in cui $k > 0$. In tal caso studiamo anche la differenziabilità, innanzitutto verifichiamo l'esistenza del gradiente della funzione, per cui in particolare calcoliamo le derivate parziali della funzione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[(0+h)^2+0\right]^k - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{2k}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{2k-1} = \begin{cases} 0 & se \\ +\infty & se \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{l\to 0} \frac{f(x,y+l)-f(x,y)}{l}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[0+(0+l)^2\right]^k - 0}{l} = \lim_{h\to 0} \frac{l^{2k}}{l} = \lim_{h\to 0} l^{2k-1} = \begin{cases} 0 & se \quad k \\ +\infty & se \end{cases}$$

di conseguenza il $\nabla f(0,0)$ esiste per $k > \frac{1}{2}$ da cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^k}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{k-\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0 & se \quad k \\ +\infty & se \end{cases}$$

dunque la funzione è differenziabile per $k > \frac{1}{2}$.