UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO
Prova scritta di Matematica II
14 Settembre 2010

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 CFU risolvano i quesiti numero 3-4-5-6-7-8-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (con geometria) risolvano i quesiti numero 1-2-4-5-9
Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 CFU (senza geometria) risolvano i quesiti numero 4-5-7-9

1. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; x - y = z - t = 0\right\},$$

$$W = \langle (1, 2, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle .$$

   (a) calcolare la dimensione ed una base di $W + V$;
   (b) dire se il vettore $(-1, -1, 4, -2)$ appartiene a $V \cap W$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 3y + z, 3x + 4y) .$$

   (a) Calcolare la dimensione ed una base di $\ker f$ e di $\operatorname{Im} f$.
   (b) Dire se f è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ e se f è ortogonalmente diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
   (c) Calcolare una base per ciascun autospazio.

3. Studiare la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1\right)^{4e^{i\pi}} + (\sqrt{2} - \sqrt{6}) \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})}{n}.$$

4. Determinare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione:

$$f(x, y) = e^{\left(x^3 - 2x\right)(y+1)}.$$

5. Risolvere i seguenti problemi:

   (a) Analizzando il polinomio caratteristico relativo alla seguente equazione differenziale:

$$y''' - 4y'' + 3y' - 12y = e^{2x} \cos(\frac{\pi}{6} + x),$$

   verificare se $y(x) = \cos 3x$ è una soluzione e calcolarne, inoltre, l'integrale generale.

   (b) Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \left(\frac{2xy' + y}{x}\right) + y^3(x) = 0, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

6. Determinare il valore dell'integrale:

$$\int_\gamma \sqrt{1+x-y^2}\, ds,$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}t^2, \\ y(t) = \sin t, \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

7. Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale:

$$\mathbf{V}(x,y) = \left(e^{\frac{x^2}{y^2}} \frac{2x}{y}, e^{\frac{x^2}{y^2}} - \frac{2x^2}{y^2} e^{\frac{x^2}{y^2}} \right)$$

per spostare un corpo di massa unitaria lungo la circonferenza $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 12 = 0$, dal punto $P = (3,3)$ al punto $P'(2,4)$.

8. Determinare il valore dell'integrale:

$$\int_S \frac{z}{\sqrt{1+\cos^2 \sqrt{x^2+y^2}}}\, d\sigma,$$

dove S è la superficie di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(u,v) = v\cos u, \\ y(u,v) = v\sin u, \\ z(u,v) = \sin v, \end{cases} \qquad (u,v) \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]^2.$$

9. Calcolare il valore dell'integrale:

$$\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}\, dx\, dy,$$

dove D è il dominio piano delimitato dalla retta $x = 1$, dalla bisettrice del 1° quadrante e dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

10. (Facoltativo) Stabilire per quali valori di k la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^k, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

è differenziabile nel proprio dominio.