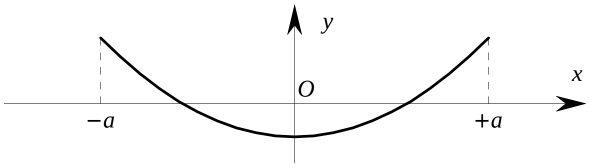
Esercizio 1 *Dato il sistema materiale filiforme mostrato in figura, costituito dal grafico della funzione*

$$y = \frac{1}{6a}\left(3x^2 - a^2\right)$$

tra i punti di ascisse $-a$ e $+a$, e di densità

$$\rho(x, y) = \frac{m}{2\sqrt{a^2 + x^2}}$$

con m parametro positivo, determinarne il baricentro e la matrice d'inerzia rispetto al riferimento dato. Individuare inoltre una terna principale d'inerzia del sistema.



Soluzione 1 *Il sistema materiale può essere rappresentato dalla curva di equazioni parametriche*

$$\gamma : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{6a}\left(3t^2 - a^2\right) \end{cases} \qquad -a \leq t \leq +a$$

per cui si ha

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = \frac{1}{6a}(6t) = \frac{t}{a} \end{cases} \qquad ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}dt = \frac{\sqrt{a^2 + t^2}}{a}dt.$$

Calcolo della massa

$$M = \int_\gamma \rho(x, y)\, ds = \int_\gamma \frac{m}{2\sqrt{a^2 + x^2}}ds = \frac{m}{2}\int_{-a}^{+a} \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}} \frac{\sqrt{a^2 + t^2}}{a}dt = \frac{m}{2a}\int_{-a}^{+a} dt = \frac{m}{2a}2a = m$$

Calcolo del baricentro. Dato che il sistema materiale presenta un asse di simmetria geometrica, ovvero l'asse y, e dato che anche la densità è una funzione simmetrica rispetto a ques'asse ($\rho(-x, y) = \rho(x, y)$), esso è un asse di simmetria materiale, quindi $G \in y$, per cui $x_G = 0$ Calcoliamo l'ordinata del baricentro

$$y_G = \frac{1}{M}\int_\gamma y\rho(x, y)\, ds = \frac{1}{m}\int_\gamma y\frac{m}{2\sqrt{a^2 + x^2}}ds = \frac{1}{2}\int_{-a}^{+a} \frac{1}{6a}\left(3t^2 - a^2\right)\frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}}\frac{\sqrt{a^2 + t^2}}{a}dt =$$
$$= \frac{1}{12a^2}\int_{-a}^{+a}\left(3t^2 - a^2\right)dt = \frac{1}{12a^2}\left[t^3 - a^2 t\right]_{-a}^{+a} = 0.$$

Calcolo degli elementi della matrice d'inerzia

$$I_x = \int_\gamma y^2\rho(x, y)\, ds = \int_\gamma y^2\frac{m}{2\sqrt{a^2 + x^2}}ds = \frac{m}{2}\int_{-a}^{+a}\frac{1}{36a^2}\left(3t^2 - a^2\right)^2\frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}}\frac{\sqrt{a^2 + t^2}}{a}dt =$$
$$= \frac{m}{72a^3}\int_{-a}^{+a}\left(3t^2 - a^2\right)^2 dt = \frac{m}{72a^3}\int_{-a}^{+a}\left(9t^4 - 6a^2t^2 + a^4\right)dt = \frac{m}{72a^3}\left[\frac{9}{5}t^5 - 2a^2t^3 + a^4t\right]_{-a}^{+a} =$$
$$= \frac{m}{36a^3}\left(\frac{9}{5}a^5 - 2a^2a^3 + a^4a\right) = \frac{ma^2}{36}\left(\frac{9}{5} - 2 + 1\right) = \frac{ma^2}{36}\frac{4}{5} = \frac{1}{45}ma^2$$

$$I_y = \int_\gamma x^2 \rho(x,y)\, ds = \int_\gamma x^2 \frac{m}{2\sqrt{a^2+x^2}} ds = \frac{m}{2}\int_{-a}^{+a} t^2 \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+t^2}dt = \frac{m}{2a}\int_{-a}^{+a} t^2 dt =$$
$$= \frac{m}{2a}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-a}^{+a} = \frac{1}{3}ma^2$$

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{45}ma^2 + \frac{1}{3}ma^2 = \frac{16}{45}ma^2$$

Il prodotto I_{xy} è nullo in quanto la terna è principale d'inerzia, per le simmetrie precedentemente dette, quindi la matrice d'inerzia è

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{45}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{45}ma^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} ma^2$$