Università degli Studi di Salerno - Facoltà di Ingegneria
C.d.L. in Ingegneria Civile - Matematica III Meccanica Razionale
II Prova in Itinere - Prof. Ciarletta - 28/01/2004
Soluzioni degli Esercizi - Dott. V. Tibullo - v.2

Introduzione

In quanto segue tutte le quantità rappresentate in grassetto devono essere considerate vettori, e in quanto tali, nella scrittura manuale per convenzione vengono scritti con un segno ondulato sotto la lettera.

Per quanto riguarda gli errori che certamente sono presenti nelle soluzioni, si prega di segnalarle per le correzioni del caso.

Esercizio n.1

Traccia

Determinare le coordinate del centro e le equazioni parametriche dell'asse centrale del seguente sistema parallelo di vettori applicati:

$$\begin{cases} P_1 = & (-1, & 1, & 0) \\ P_2 = & (-1, & 1, & -1) \\ P_3 = & (1, & 0, & 1) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{v}_1 = & -3\mathbf{e}_1 & -\mathbf{e}_2 & -2\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_2 = & 6\mathbf{e}_1 & +2\mathbf{e}_2 & +4\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v}_3 = & 9\mathbf{e}_1 & +3\mathbf{e}_2 & +6\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

Soluzione

Affinché esista l'asse centrale è necessario che il risultante del sistema sia non nullo. Affinché esista il centro, oltre alla condizione precedente, è inoltre necessario che il sistema di vettori sia parallelo. Verifichiamo la prima condizione:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \\ &= (-3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3) + (6\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3) + (9\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3) = \\ &= (-3 + 6 + 9)\mathbf{e}_1 + (-1 + 2 + 3)\mathbf{e}_2 + (-2 + 4 + 6)\mathbf{e}_3 = \\ &= 12\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

quindi il risultante effettivamente è non nullo.

Verifichiamo la seconda condizione, calcolando i versori dei tre vettori. Calcoliamo prima i moduli:

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_1| &= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14} \\ |\mathbf{v}_2| &= \sqrt{(6)^2 + (2)^2 + (4)^2} = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56} = \sqrt{4 \times 14} = 2\sqrt{14} \\ |\mathbf{v}_3| &= \sqrt{(9)^2 + (3)^2 + (6)^2} = \sqrt{81 + 9 + 36} = \sqrt{126} = \sqrt{9 \times 14} = 3\sqrt{14} \end{aligned}$$

quindi i versori:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \frac{-3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3}{\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}(3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \\
\mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|} = \frac{6\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3}{2\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \\
\mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3}{|\mathbf{v}_3|} = \frac{9\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3}{3\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)
\end{aligned}$$

Poiché, a meno del segno, i tre versori sono uguali, i tre vettori sono paralleli. Questo si poteva vedere anche osservando che valgono le relazioni:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}_2 &= -2\mathbf{v}_1 \\
\mathbf{v}_3 &= -3\mathbf{v}_1
\end{aligned}$$

ovvero che i tre vettori sono paralleli ad uno stesso vettore. Queste relazioni possono anche essere usate per ottenere i moduli dei vettori $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, noto il modulo di $\mathbf{v}_1$. Infatti:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{v}_2| &= |-2\mathbf{v}_1| = 2|\mathbf{v}_1| = 2\sqrt{14} \\
|\mathbf{v}_3| &= |-3\mathbf{v}_1| = 3|\mathbf{v}_1| = 3\sqrt{14}
\end{aligned}$$

evitando così un po' di calcoli.

Conviene calcolare prima il centro, in quanto risulterà poi più semplice il calcolo dell'asse centrale. Il centro è dato dalla formula seguente (si osservi che il punto O può essere sostituito da qualsiasi punto a nostra scelta, ma per semplicità di calcolo conviene scegliere questo):

$$C = O + \frac{\sum_{i=1}^{3} v_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{3} v_i}$$

dove le v_i sono le componenti dei vettori $\mathbf{v}_i$ sul versore del sistema. Come abbiamo già visto, in un sistema parallelo tutti i vettori hanno, a meno del segno, lo stesso versore. Possiamo scegliere ad arbitrio uno di questi due versori come versore del sistema, e per ridurre il numero di segni meno che compaiono nei calcoli conviene scegliere il versore concorde con il risultante, ovvero:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$$

Dato che $\mathbf{u}$ è discorde con $\mathbf{u}_1$ e concorde con $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, risulta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= |\mathbf{v}_1|\mathbf{u}_1 = -|\mathbf{v}_1|\mathbf{u} = -\sqrt{14}\mathbf{u} \\
\mathbf{v}_2 &= |\mathbf{v}_2|\mathbf{u}_2 = |\mathbf{v}_2|\mathbf{u} = 2\sqrt{14}\mathbf{u} \\
\mathbf{v}_3 &= |\mathbf{v}_3|\mathbf{u}_3 = |\mathbf{v}_3|\mathbf{u} = 3\sqrt{14}\mathbf{u}
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} = -\sqrt{14}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\sqrt{14} \\
v_2 &= \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u} = 2\sqrt{14}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 2\sqrt{14} \\
v_3 &= \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u} = 3\sqrt{14}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 3\sqrt{14}
\end{aligned}$$

Calcoliamo i vettori $P_i - O$:

$$\begin{aligned}
P_1 - O &= (-1,1,0) - (0,0,0) = (-1-0)\mathbf{e}_1 + (1-0)\mathbf{e}_2 + (0-0)\mathbf{e}_3 = \\
&= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\
P_2 - O &= (-1,1,-1) - (0,0,0) = (-1-0)\mathbf{e}_1 + (1-0)\mathbf{e}_2 + (-1-0)\mathbf{e}_3 = \\
&= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \\
P_3 - O &= (1,0,1) - (0,0,0) = (1-0)\mathbf{e}_1 + (0-0)\mathbf{e}_2 + (1-0)\mathbf{e}_3 = \\
&= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Possiamo a questo punto applicare la formula del centro, ottenendo:

$$\begin{aligned}
C &= O + \frac{v_1(P_1 - O) + v_2(P_2 - O) + v_3(P_3 - O)}{v_1 + v_2 + v_3} = \\
&= O + \frac{-\sqrt{14}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + 2\sqrt{14}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) + 3\sqrt{14}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)}{-\sqrt{14} + 2\sqrt{14} + 3\sqrt{14}} = \\
&= O + \frac{-(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + 2(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) + 3(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)}{-1 + 2 + 3} = \\
&= O + \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_3}{4} = \\
&= O + \frac{(1 - 2 + 3)\mathbf{e}_1 + (-1 + 2)\mathbf{e}_2 + (-2 + 3)\mathbf{e}_3}{4} = \\
&= O + \frac{2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{4} = (0,0,0) + \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{e}_3 = \\
&= (0 + \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{4}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})
\end{aligned}$$

In definitiva il centro è dato da

$$\boxed{C = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4})}$$

A questo punto calcolare l'asse centrale è semplice, utilizzando la formula seguente, valida solo per sistemi paralleli:

$$P(t) = C + t\mathbf{R} \qquad t \in R$$

che diventa:

$$\begin{aligned}
P(t) &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) + t(12\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3) = \\
&= (\frac{1}{2} + 12t, \frac{1}{4} + 4t, \frac{1}{4} + 8t) \qquad t \in R
\end{aligned}$$

In definitiva l'asse centrale è dato da

$$\boxed{P(t) = (\tfrac{1}{2} + 12t, \tfrac{1}{4} + 4t, \tfrac{1}{4} + 8t) \qquad t \in R}$$

o in coordinate:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} + 12t \\ y(t) = \frac{1}{4} + 4t \\ z(t) = \frac{1}{4} + 8t \end{cases} \qquad t \in R$$

E' possibile calcolare le equazioni parametriche dell'asse centrale anche utilizzando la formula generale, valida anche per sistemi non paralleli, anche se richiede più calcoli:

$$P(t) = O + \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O}{|\mathbf{R}|^2} + t\mathbf{R} \qquad t \in R$$

Per applicare questa formula dobbiamo calcolare il momento polare risultante rispetto al polo O:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_O &= \sum_{i=1}^{3} (P_i - O) \times \mathbf{v}_i = \\
&= (P_1 - O) \times \mathbf{v}_1 + (P_2 - O) \times \mathbf{v}_2 + (P_3 - O) \times \mathbf{v}_3 = \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \\
&= (-2 - 0)\mathbf{e}_1 - (2 - 0)\mathbf{e}_2 + (1 + 3)\mathbf{e}_3 + \\
&\quad +(4 + 2)\mathbf{e}_1 - (-4 + 6)\mathbf{e}_2 + (-2 - 6)\mathbf{e}_3 + \\
&\quad (0 - 3)\mathbf{e}_1 - (6 - 9)\mathbf{e}_2 + (3 - 0)\mathbf{e}_3 \\
&= -2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 + 6\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 = \\
&= (-2 + 6 - 3)\mathbf{e}_1 + (-2 - 2 + 3)\mathbf{e}_2 + (4 - 8 + 3)\mathbf{e}_3 = \\
&= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Calcoliamo ora il prodotto vettoriale tra il risultante e il momento risultante:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 12 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-4 + 8)\mathbf{e}_1 - (-12 - 8)\mathbf{e}_2 + (-12 - 4)\mathbf{e}_3 = \\
&= 4\mathbf{e}_1 + 20\mathbf{e}_2 - 16\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

e il modulo quadro del risultante:

$$|\mathbf{R}|^2 = 12^2 + 4^2 + 8^2 = 144 + 16 + 64 = 224$$

A questo punto applichiamo la formula generale dell'asse centrale e otteniamo:

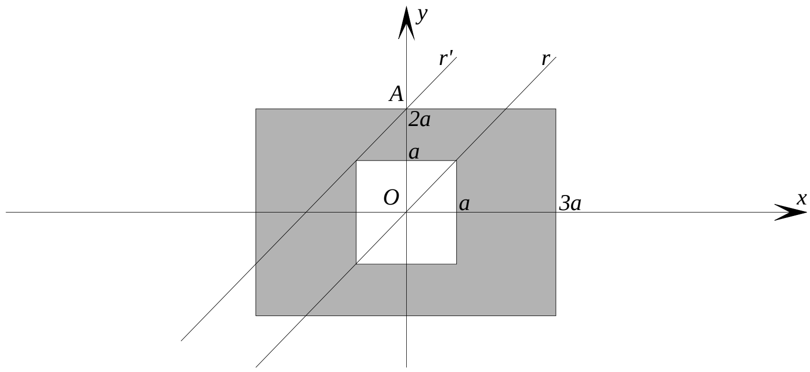
$$\begin{aligned}
P(t) &= O + \frac{4\mathbf{e}_1 + 20\mathbf{e}_2 - 16\mathbf{e}_3}{224} + t(12\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3) = \\
&= O + \frac{1}{56}\mathbf{e}_1 + \frac{5}{56}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{14}\mathbf{e}_3 + t(12\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3) = \\
&= (0,0,0) + (\frac{1}{56} + 12t)\mathbf{e}_1 + (\frac{5}{56} + 4t)\mathbf{e}_2 + (-\frac{1}{14} + 8t)\mathbf{e}_3 = \\
&= (\frac{1}{56} + 12t, \frac{5}{56} + 4t, -\frac{1}{14} + 8t) \qquad t \in R
\end{aligned}$$

Il fatto che il risultato sia diverso da quello trovato precedentemente è dovuto al fatto che una stessa retta ammette infinite rappresentazioni parametriche. Le due equazioni trovate rappresentano la stessa retta in quanto sono parallele (hanno lo stesso vettore direzionale $(12,4,8)$) e passano per uno stesso punto (basta porre $t = 9/224$ nella seconda e si ottiene il centro).

Esercizio n.2

Traccia

Dato un corpo solido piano e omogeneo, costituito da un rettangolo di lati $6a$ e $4a$, con un foro quadrato di lato $2a$, come mostrato in figura, determinare la posizione del baricentro G, nonché i momenti e prodotti di inerzia I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_r, $I_{r'}$, dove r è la retta passante per l'origine degli assi e inclinata di un angolo $\theta = \pi/4$ rispetto all'orizzontale, mentre r' è la parallela a questa passante per il punto $A = (0, 2a)$.



Soluzione

Per la determinazione del baricentro possiamo osservare che il corpo, oltre a essere omogeneo, è simmetrico tanto rispetto all'asse x che rispetto all'asse y, quindi poiché se una figura è dotata di una retta di simmetria il baricentro giacerà su di essa, allora il baricentro si troverà all'incrocio di tali rette, ovvero

$$\boxed{G = (0,0,0)}$$

Per determinare le coordinate del baricentro possiamo anche utilizzare direttamente la definizione:

$$G - O = \frac{1}{M} \int_D (P - O)\rho(x, y)dxdy$$

che in coordinate si scrive:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \int_D x\rho(x, y)dxdy \\ y_G &= \frac{1}{M} \int_D y\rho(x, y)dxdy \\ z_G &= 0 \qquad \text{(corpo piano)} \end{aligned}$$

dove M è la massa del corpo:

$$M = \int_D \rho(x, y)dxdy$$

Per un corpo omogeneo ($\rho(x, y) = \rho_0 = cost.$), come nel nostro caso, le formule precedenti si riducono a:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{A} \int_D xdxdy \\ y_G &= \frac{1}{A} \int_D ydxdy \\ z_G &= 0 \qquad \text{(corpo piano)} \end{aligned}$$

dove

$$A = \int_D dxdy$$

è la misura della superficie del corpo.

Per un corpo costituito dall'unione di due corpi di masse M_1, M_2, con baricentri G_1, G_2, la formula distributiva del baricentro si scrive

$$G - O = \frac{M_1(G_1 - O) + M_2(G_2 - O)}{M_1 + M_2}$$

Nel caso di un corpo che presenta un foro (il dominio può essere scritto come il complemento di due domini più semplici), come nel nostro caso, possiamo considerare l'intero corpo come l'unione di due corpi, uno dato dal corpo senza considerare il foro, e un corpo avente la forma del foro e densità di segno opposto rispetto al primo corpo. Per corpi omogenei di questo tipo la formula distributiva precedente diventa:

$$G - O = \frac{A_1(G_1 - O) - A_2(G_2 - O)}{A_1 - A_2}$$

Per applicare questa formula calcoliamo dapprima le aree. Dato che i nostri due corpi hanno la forma di figure geometriche semplici, possiamo calcolare le aree utilizzando formule di geometria elementare (area del quadrato e del rettangolo), ottenendo:

$$\begin{aligned} A_1 &= b \times h = [(3a) - (-3a)] \times [(2a) - (-2a)] = 24a^2 \\ A_2 &= l^2 = [(a) - (-a)]^2 = 4a^2 \end{aligned}$$

Alternativamente possiamo utilizzare la definizione di misura della superficie:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{D_1} dxdy = \int_{-3a}^{+3a} dx \int_{-2a}^{+2a} dy = [x]_{-3a}^{+3a}[y]_{-2a}^{+2a} = \\ &= [(3a) - (-3a)] \times [(2a) - (-2a)] = 24a^2 \\ A_2 &= \int_{D_2} dxdy = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-a}^{+a} dy = [x]_{-a}^{+a}[y]_{-a}^{+a} = \\ &= [(a) - (-a)] \times [(a) - (-a)] = 4a^2 \end{aligned}$$

e naturalmente il risultato è lo stesso. Calcoliamo ora i baricentri delle due figure

$$\begin{aligned} x_{G_1} &= \frac{1}{A_1}\int_{D_1} xdxdy = \frac{1}{24a^2}\int_{-3a}^{+3a} xdx \int_{-2a}^{+2a} dy = \frac{1}{24a^2}[\frac{x^2}{2}]_{-3a}^{+3a}[y]_{-2a}^{+2a} = \\ &= \frac{1}{24a^2}\frac{1}{2}[(+3a)^2 - (-3a)^2] \times [(+2a) - (-2a)] = \frac{1}{48a^2}0 \times 4a = 0 \\ y_{G_1} &= \frac{1}{A_1}\int_{D_1} ydxdy = \frac{1}{24a^2}\int_{-3a}^{+3a} dx \int_{-2a}^{+2a} ydy = \frac{1}{24a^2}[x]_{-3a}^{+3a}[\frac{y^2}{2}]_{-2a}^{+2a} = \\ &= \frac{1}{24a^2}[(+3a) - (-3a)] \times \frac{1}{2}[(+2a)^2 - (-2a)^2] = \frac{1}{48a^2}6a \times 0 = 0 \\ x_{G_2} &= \frac{1}{A_2}\int_{D_2} xdxdy = \frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{+a} xdx \int_{-a}^{+a} dy = \frac{1}{4a^2}[\frac{x^2}{2}]_{-a}^{+a}[y]_{-a}^{+a} = \\ &= \frac{1}{4a^2}\frac{1}{2}[(+a)^2 - (-a)^2] \times [(+a) - (-a)] = \frac{1}{8a^2}0 \times 2a = 0 \\ y_{G_2} &= \frac{1}{A_2}\int_{D_2} ydxdy = \frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{+a} dx \int_{-a}^{+a} ydy = \frac{1}{4a^2}[x]_{-a}^{+a}[\frac{y^2}{2}]_{-a}^{+a} = \\ &= \frac{1}{4a^2}[(+a) - (-a)] \times \frac{1}{2}[(+a)^2 - (-a)^2] = \frac{1}{8a^2}2a \times 0 = 0 \end{aligned}$$

quindi G_1 e G_2 coincidono con il punto O, come era prevedibile, dato che anche le figure componenti sono simmetriche rispetto ad entrambi gli assi coordinati. Applicando la formula distributiva otteniamo che anche G coincide con O.

Passiamo ora al calcolo dei momenti di inerzia. Le definizioni generali per figure piane sono le seguenti:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_D y^2 \rho(x,y) dx dy \\ I_y &= \int_D x^2 \rho(x,y) dx dy \\ I_z &= \int_D (x^2+y^2) \rho(x,y) dx dy = I_x + I_y \\ I_{xy} &= -\int_D xy \rho(x,y) dx dy \end{aligned}$$

che nel caso di figure omogenee diventano

$$\begin{aligned} I_x &= \rho_0 \int_D y^2 dx dy \\ I_y &= \rho_0 \int_D x^2 dx dy \\ I_z &= \rho_0 \int_D (x^2+y^2) dx dy = I_x + I_y \\ I_{xy} &= -\rho_0 \int_D xy dx dy \end{aligned}$$

Si osservi innanzitutto che, a differenza delle formule per il baricentro, la densità non scompare. Altra cosa da osservare è che il momento di inerzia rispetto all'asse z non è nullo, infatti il momento di inerzia rispetto a un asse può annullarsi se e solo se tutta la massa è concentrata sull'asse stesso.

Per figure che possono pensarsi come l'unione di figure più semplici, i momenti di inerzia sono additivi, discendendo questa proprietà dalle proprietà elementari degli integrali. Per figure che possono pensarsi come la differenza di due figure più semplici, i momenti di inerzia si sottraggono, utilizzando lo stesso metodo di considerare il dominio da sottrarre come una figura di densità di segno opposto.

Determiniamo i momenti di inerzia del rettangolo, considerato pieno:

$$\begin{aligned}
I_x^1 &= \rho_0 \int_{D_1} y^2 dxdy = \rho_0 \int_{-3a}^{+3a} dx \int_{-2a}^{+2a} y^2 dy = \rho_0 [x]_{-3a}^{+3a} \times [\frac{y^3}{3}]_{-2a}^{+2a} = \\
&= \rho_0 [(+3a) - (-3a)] \times \frac{1}{3}[(+2a)^3 - (-2a)^3] = \rho_0 6a \times \frac{2}{3} 8a^3 = 32\rho_0 a^4 \\
I_y^1 &= \rho_0 \int_{D_1} x^2 dxdy = \rho_0 \int_{-3a}^{+3a} x^2 dx \int_{-2a}^{+2a} dy = \rho_0 [\frac{x^3}{3}]_{-3a}^{+3a} \times [y]_{-2a}^{+2a} = \\
&= \rho_0 \frac{1}{3}[(+3a)^3 - (-3a)^3] \times [(+2a) - (-2a)] = \rho_0 \frac{2}{3} 27a^3 \times 4a = 72\rho_0 a^4 \\
I_z^1 &= I_x^1 + I_y^1 = 32\rho_0 a^4 + 72\rho_0 a^4 = 104\rho_0 a^4 \\
I_{xy}^1 &= -\rho_0 \int_{D_1} xydxdy = -\rho_0 \int_{-3a}^{+3a} xdx \int_{-2a}^{+2a} ydy = -\rho_0 [\frac{x^2}{2}]_{-3a}^{+3a} \times [\frac{y^2}{2}]_{-2a}^{+2a} = \\
&= -\rho_0 \frac{1}{2}[(+3a)^2 - (-3a)^2] \times \frac{1}{2}[(+2a)^2 - (-2a)^2] = -\rho_0 0 \times 0 = 0
\end{aligned}$$

Determiniamo ora i momenti di inerzia del quadrato, di densità $-\rho_0$:

$$\begin{aligned}
I_x^2 &= -\rho_0 \int_{D_2} y^2 dxdy = -\rho_0 \int_{-a}^{+a} dx \int_{-a}^{+a} y^2 dy = -\rho_0 [x]_{-a}^{+a} \times [\frac{y^3}{3}]_{-a}^{+a} = \\
&= -\rho_0 [(+a) - (-a)] \times \frac{1}{3}[(+a)^3 - (-a)^3] = -\rho_0 2a \times \frac{2}{3} a^3 = -\frac{4}{3}\rho_0 a^4 \\
I_y^2 &= -\rho_0 \int_{D_2} x^2 dxdy = -\rho_0 \int_{-a}^{+a} x^2 dx \int_{-a}^{+a} dy = -\rho_0 [\frac{x^3}{3}]_{-a}^{+a} \times [y]_{-a}^{+a} = \\
&= -\rho_0 \frac{1}{3}[(+a)^3 - (-a)^3] \times [(+a) - (-a)] = -\rho_0 \frac{2}{3} a^3 \times 2a = -\frac{4}{3}\rho_0 a^4 \\
I_z^2 &= I_x^1 + I_y^1 = -\frac{4}{3}\rho_0 a^4 - \frac{4}{3}\rho_0 a^4 = -\frac{8}{3}\rho_0 a^4 \\
I_{xy}^2 &= \rho_0 \int_{D_2} xydxdy = \rho_0 \int_{-a}^{+a} xdx \int_{-a}^{+a} ydy = \rho_0 [\frac{x^2}{2}]_{-a}^{+a} \times [\frac{y^2}{2}]_{-a}^{+a} = \\
&= \rho_0 \frac{1}{2}[(+a)^2 - (-a)^2] \times \frac{1}{2}[(+a)^2 - (-a)^2] = \rho_0 0 \times 0 = 0
\end{aligned}$$

Quindi in definitiva:

$$\begin{aligned}
I_x &= I_x^1 + I_x^2 = 32\rho_0 a^4 - \frac{4}{3}\rho_0 a^4 = \frac{92}{3}\rho_0 a^4 \\
I_y &= I_y^1 + I_y^2 = 72\rho_0 a^4 - \frac{4}{3}\rho_0 a^4 = \frac{212}{3}\rho_0 a^4 \\
I_z &= I_z^1 + I_z^2 = 104\rho_0 a^4 - \frac{8}{3}\rho_0 a^4 = \frac{304}{3}\rho_0 a^4 \\
I_{xy} &= I_{xy}^1 + I_{xy}^2 = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Riassumendo

$$\boxed{I_x = \tfrac{92}{3}\rho_0 a^4}$$

$$\boxed{I_y = \tfrac{212}{3}\rho_0 a^4}$$

$$\boxed{I_z = \tfrac{304}{3}\rho_0 a^4}$$

$$\boxed{I_{xy} = 0}$$

Osserviamo che i risultati relativi ai prodotti di inerzia I_{xy}, I_{xy}^1 e I_{xy}^2 potevano già essere ottenuti facendo le seguenti considerazioni: il corpo è omogeneo ed è simmetrico rispetto al piano xy (come ogni figura piana), inoltre nel caso specifico è simmetrico anche rispetto ai piani xz e yz, e tenendo conto che quando un corpo omogeneo ha un piano di simmetria, ogni retta normale a tale piano è un'asse principale d'inerzia rispetto al punto di intersezione col piano stesso, ne risulta che gli assi x, y e z costituiscono una terna principale d'inerzia, e quindi i prodotti d'inerzia saranno tutti nulli.

Determiniamo ora il momento d'inerzia rispetto alla retta r. Utilizziamo a tale scopo la formula:

$$I_r = \sum_{h,k=1}^{3} I_{hk}\alpha_h\alpha_k$$

dove I_{hk} sono gli elementi della matrice d'inerzia, mentre α_h sono le componenti del versore $\mathbf{u}$ della retta. La retta giace nel piano xy, e forma un angolo $\theta = \pi/4$ con l'asse x, quindi avremo

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2 \\
\alpha_1 &= \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\alpha_2 &= \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\alpha_3 &= 0
\end{aligned}$$

Essendo $\alpha_3 = 0$, nella somma si annulleranno tutti i termini con h o k pari a 3, tenendo anche conto del fatto che i prodotti d'inerzia sono nulli, si ha

$$I_r = I_x\alpha_1^2 + I_y\alpha_2^2 = \frac{92}{3}\rho_0 a^4\frac{1}{2} + \frac{212}{3}\rho_0 a^4\frac{1}{2} = \frac{152}{3}\rho_0 a^4$$

In definitiva

$$\boxed{I_r = \tfrac{152}{3}\rho_0 a^4}$$

Per determinare il momento di inerzia rispetto alla retta r', utilizziamo il teorema degli assi paralleli, che in formule si scrive

$$I_{r'} = I_{r_G} + Md^2$$

Nel caso in esame la retta r passa per il baricentro ed è parallela ad r', quindi coincide con la retta r_G necessaria per applicare il teorema. La massa totale del sistema è

$$M = M_1 + M_2 = \rho_0 A_2 - \rho_0 A_1 = 20\rho_0 a^2$$

mentre la distanza tra le due rette è pari a metà della diagonale del quadrato, ovvero

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{2}2a = \sqrt{2}a$$

In casi più complicati potrebbe essere necessario applicare la formula della distanza di un punto da una retta. L'equazione cartesiana implicita della retta r' è

$$x - y + 2a = 0$$

e la distanza del baricentro da questa retta è

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \times 0 - 1 \times 0 + 2a|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$$

Calcoliamo infine il momento d'inerzia cercato:

$$\begin{aligned} I_{r'} &= I_r + Md^2 = \frac{152}{3}\rho_0 a^4 + 20\rho_0 a^2 \times (\sqrt{2}a)^2 = \frac{152}{3}\rho_0 a^4 + 20\rho_0 a^2 \times 2a^2 = \\ &= \frac{152}{3}\rho_0 a^4 + 40\rho_0 a^4 = \frac{272}{3}\rho_0 a^4 \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{I_{r'} = \tfrac{272}{3}\rho_0 a^4}$$

Esercizio n.3

Traccia

Dato il seguente campo di forze:

$$\mathbf{F} = y\,(2x + y)\,\mathbf{e}_1 + x\,(x + 2y)\,\mathbf{e}_2$$

determinare se esso è conservativo, ed in caso positivo determinarne il potenziale. Calcolare il lavoro che si compie sull'arco di curva di equazione $y = x^2$, tra i punti di ascisse 1 e 2. Se il campo è conservativo verificare che lo stesso risultato si ottiene utilizzando opportunamente il potenziale.

Soluzione

Per determinare se il campo è conservativo, essendo un campo piano (la componente z è nulla) è sufficiente verificare che le derivate incrociate delle sue due componenti sono uguali tra loro, ovvero:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

dove F_x e F_y sono le componenti del campo:

$$\begin{aligned} F_x &= y(2x+y) \\ F_y &= x(x+2y) \end{aligned}$$

Facciamo la verifica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} y(2x+y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy+y^2) = 2x+2y \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} x(x+2y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+2xy) = 2x+2y \end{aligned}$$

quindi le derivate sono effettivamente uguali, quindi il campo è conservativo. In realtà sarebbe necessario verificare anche che il dominio in cui è definito il campo abbia o la proprietà di essere semplicemente connesso o di essere un insieme stellato, ed essendo il dominio R^2, gode di entrambe le proprietà. Per un campo non piano la verifica va fatta verificando che il rotore del campo è nullo. Il rotore è definito come:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{F} &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

e la condizione

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$$

si traduce in

$$\begin{cases} \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{cases}$$

e per un campo piano resta solo la terza condizione, che è quella che abbiamo applicato.

Determiniamo ora il potenziale del campo. Applichiamo a tale scopo la formula seguente:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} F_x(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} F_y(x,t)dt$$

Il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ deve essere un punto arbitrario appartenente al dominio dove il potenziale si annulla, e per semplicità scegliamo l'origine degli assi (ricordiamo che il potenziale è definito a meno di una costante additiva, e quindi con una opportuna scelta di questa costante possiamo farlo annullare il qualsiasi punto del dominio). Abbiamo:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_0^x F_x(t,0)dt + \int_0^y F_y(x,t)dt = \\ &= \int_0^x 0(2t+0)dt + \int_0^y x(x+2t)dt = \int_0^y x(x+2t)dt = \\ &= \int_0^y (x^2+2xt)dt = x^2 \int_0^y dt + x \int_0^y 2tdt = x^2[t]_0^y + x[t^2]_0^y = \\ &= x^2(y-0) + x(y^2-0^2) = x^2y + xy^2 = xy(x+y) \end{aligned}$$

In definitiva il potenziale è

$$\boxed{U(x,y) = xy(x+y)}$$

Alternativamente è possibile determinare il potenziale utilizzando le relazioni seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = F_x \\ \frac{\partial U}{\partial y} = F_y \end{cases}$$

Dalla prima ricaviamo:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int F_x dx = \int y(2x+y)dx = \int (2xy+y^2)dx = \\ &= y \int 2xdx + y^2 \int dx = x^2y + xy^2 + c(y) \end{aligned}$$

Facendone la derivata parziale rispetto a y:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + xy^2 + c(y)\right) = x^2 + 2xy + c'(y)$$

e sostituendo nella seconda delle relazioni:

$$x^2 + 2xy + c'(y) = x(x+2y)$$

da cui

$$c'(y) = 0$$

e quindi

$$c(y) = k$$

dove k è una costante arbitraria, che possiamo scegliere uguale a 0. Sostituendo questo valore di $c(y)$ nell'espressione del potenziale trovata precedentemente, otteniamo infine:

$$U(x, y) = x^2y + xy^2 = xy(x + y)$$

che è lo stesso risultato trovato con l'altro metodo, grazie alla scelta $k = 0$.

Calcoliamo ora il lavoro compiuto dal campo. Le equazioni parametriche della curva sono le seguenti:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad 1 \leq t \leq 2$$

con derivate

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 2t \end{cases}$$

quindi l'integrale curvilineo che ci dà il lavoro si scrive:

$$\begin{aligned} L &= (\gamma)\int_P^Q \mathbf{F} \cdot dP = (\gamma)\int_P^Q F_x dx + F_y dy = \\ &= \int_1^2 \big(F_x(t, t^2)x'(t) + F_y(t, t^2)y'(t)\big)\, dt = \\ &= \int_1^2 \big(t^2(2t + t^2)1 + t(t + 2t^2)2t\big)\, dt = \\ &= \int_1^2 (2t^3 + t^4 + 2t^3 + 4t^4)dt = \int_1^2 (4t^3 + 5t^4)dt = \\ &= \big[t^4 + t^5\big]_1^2 = (2^4 + 2^5) - (1^4 + 1^5) = \\ &= (16 + 32) - (1 + 1) = 48 - 2 = 46 \end{aligned}$$

In definitiva il lavoro è

$$\boxed{L = 46}$$

Per calcolare il lavoro utilizzando il potenziale ci servono le ordinate dei punti P e Q, che si ottengono facilmente sostituendo le ascisse note nell'equazione esplicita della curva, e otteniamo:

$$\begin{aligned} P &= (1, 1) \\ Q &= (2, 4) \end{aligned}$$

e possiamo ora calcolare il lavoro come differenza di potenziale:

$$\begin{aligned} L &= U_Q - U_P = U(2, 4) - U(1, 1) = \\ &= 2 \times 4 \times (2 + 4) - 1 \times 1 \times (1 + 1) = 48 - 2 = 46 \end{aligned}$$

e come dev'essere otteniamo lo stesso risultato.

Esercizio n.4

Traccia

Dato un punto materiale di massa m, vincolato a muoversi senza attrito sulla circonferenza di equazione $x^2+y^2-4Rx-2Ry+4R^2=0$, e soggetto, oltre che alla forza peso, alla forza elastica $\mathbf{F}_1 = k\,(A-P)$, con $A=(0,3R)$ e alla forza $\mathbf{F}_2 = \lambda(P-O)\times \mathbf{e}_3$. Determinare:

- l'equazione pura del moto;
- la reazione vincolare;
- le eventuali posizioni di equilibrio, con $\lambda = 2k$, $mg = 2kR$;
- la reazione vincolare nei punti di equilibrio.

Soluzione

Cominciamo con il determinare il centro e il raggio della circonferenza. Questi sono dati dalle seguenti formule:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{a}{2} \\ y_0 &= -\frac{b}{2} \\ r^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \end{aligned}$$

dove a e b sono i coefficienti dei termini lineari in x e y nell'equazione della circonferenza, rispettivamente, mentre c è il termine noto, quindi

$$\begin{aligned} a &= -4R \\ b &= -2R \\ c &= 4R^2 \end{aligned}$$

Sostituendo nelle formule precendenti troviamo:

$$\begin{aligned} C &= (x_0, y_0, 0) = (-\frac{4R}{2}, -\frac{2R}{2}, 0) = (2R, R, 0) \\ r^2 &= (2R)^2 + (R)^2 - 4R^2 = R^2 \end{aligned}$$

quindi il parametro R che compare nell'equazione corrisponde proprio al raggio della circonferenza. La circonferenza sarà tangente all'asse x nel punto di coordinate $(2R, 0, 0)$.

Le forze a cui è soggetto il punto materiale sono le seguenti:

$$\begin{cases} m\mathbf{g} \ \ \text{(forza peso)} \\ \mathbf{F}_1 = k(A-P) \\ \mathbf{F}_2 = \lambda(P-O)\times \mathbf{e}_3 \\ \boldsymbol{\phi} \ \ \text{(reazione vincolare)} \end{cases}$$

Scomponiamo queste forze lungo le direzioni del triedro di Frenet costruito nel punto geometrico in cui si trova al tempo t il punto materiale. I versori del triedro di Frenet per la circonferenza sono:

$$\begin{cases} \mathbf{t} = -\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{n} = -\cos\theta\mathbf{e}_1 - \sin\theta\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b} = \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

dove θ è l'angolo formato dalla semiretta di origine il centro del cerchio e parallela e concorde con l'asse x e la semiretta con la stessa origine e passante per la posizione del punto P, misurato in senso antiorario.

La forza peso si può scrivere:

$$m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_2$$

e le sue componenti nella terna considerata sono le seguenti:

$$\begin{aligned} (m\mathbf{g})_t &= m\mathbf{g}\cdot\mathbf{t} = -mg\mathbf{e}_2\cdot(-\sin\theta\mathbf{e}_1 + \cos\theta\mathbf{e}_2) = -mg\cos\theta \\ (m\mathbf{g})_n &= m\mathbf{g}\cdot\mathbf{n} = -mg\mathbf{e}_2\cdot(-\cos\theta\mathbf{e}_1 - \sin\theta\mathbf{e}_2) = mg\sin\theta \\ (m\mathbf{g})_b &= m\mathbf{g}\cdot\mathbf{b} = -mg\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = 0 \end{aligned}$$

La reazione vincolare si può scrivere:

$$\boldsymbol{\phi} = \phi_t\mathbf{t} + \phi_n\mathbf{n} + \phi_b\mathbf{b} = \phi_n\mathbf{n} + \phi_b\mathbf{b}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il vincolo è privo di attrito, e quindi la componente lungo la direzione tangente al vincolo della reazione vincolare è nulla. Evidentemente:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\phi})_t &= \boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{t} = \phi_t = 0 \\ (\boldsymbol{\phi})_n &= \boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{n} = \phi_n \\ (\boldsymbol{\phi})_b &= \boldsymbol{\phi}\cdot\mathbf{b} = \phi_b \end{aligned}$$

Andiamo adesso ad esaminare le altre due forze. Per scrivere in modo esplicito la forza $\mathbf{F}_1$ abbiamo bisogno delle coordinate del punto P, che da semplici considerazioni geometriche risultano:

$$P = (x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta, 0)$$

dove x_0 e y_0 sono le coordinate del centro del cerchio, quindi nel caso in oggetto le coordinate diventano:

$$P = (2R + R\cos\theta, R + R\sin\theta, 0) = R(\cos\theta + 2, \sin\theta + 1, 0)$$

quindi otteniamo:

$$A - P = R(0,3,0) - R(\cos\theta + 2, \sin\theta + 1, 0) = -R[(\cos\theta + 2)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta - 2)\mathbf{e}_2]$$

quindi:

$$\mathbf{F}_1 = k(A-P) = -kR[(\cos\theta+2)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta-2)\mathbf{e}_2]$$

Le componenti della forza $\mathbf{F}_1$ sulla terna sono:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}_1)_t &= \mathbf{F}_1\cdot\mathbf{t} = -kR[(\cos\theta+2)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta-2)\mathbf{e}_2]\cdot(-\sin\theta\mathbf{e}_1+\cos\theta\mathbf{e}_2) = \\
&= -kR[(\cos\theta+2)(-\sin\theta)+(\sin\theta-2)\cos\theta] = \\
&= -kR[-\cos\theta\sin\theta-2\sin\theta+\cos\theta\sin\theta-2\cos\theta] = 2kR(\cos\theta+\sin\theta) \\
(\mathbf{F}_1)_n &= \mathbf{F}_1\cdot\mathbf{n} = -kR[(\cos\theta+2)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta-2)\mathbf{e}_2]\cdot(-\cos\theta\mathbf{e}_1-\sin\theta\mathbf{e}_2) = \\
&= -kR[(\cos\theta+2)(-\cos\theta)+(\sin\theta-2)(-\sin\theta)] = \\
&= -kR[-\cos^2\theta-2\cos\theta-\sin^2\theta+2\sin\theta] = kR(2\cos\theta-2\sin\theta+1) \\
(\mathbf{F}_1)_b &= \mathbf{F}_1\cdot\mathbf{b} = -kR[(\cos\theta+2)\mathbf{e}_1 + (\sin\theta-2)\mathbf{e}_2]\cdot\mathbf{e}_3 = 0
\end{aligned}$$

Determiniamo ora la forza $\mathbf{F}_2$. Il vettore $P-O$ è dato da:

$$P-O = R(\cos\theta+2,\sin\theta+1,0)-(0,0,0) = R[(\cos\theta+2)\mathbf{e}_1+(\sin\theta+1)\mathbf{e}_2]$$

Determiniamo il prodotto vettoriale con $\mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned}
(P-O)\times\mathbf{e}_3 &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ R(\cos\theta+2) & R(\sin\theta+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= [R(\sin\theta+1)-0]\mathbf{e}_1 - [R(\cos\theta+2)-0]\mathbf{e}_2 + (0-0)\mathbf{e}_3 = \\
&= R(\sin\theta+1)\mathbf{e}_1 - R(\cos\theta+2)\mathbf{e}_2 = \\
&= R[(\sin\theta+1)\mathbf{e}_1 - (\cos\theta+2)\mathbf{e}_2] =
\end{aligned}$$

Osserviamo che il risultato si poteva ottenere anche utilizzando le relazioni:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \\
\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
(P-O)\times\mathbf{e}_3 &= R[(\cos\theta+2)\mathbf{e}_1+(\sin\theta+1)\mathbf{e}_2]\times\mathbf{e}_3 = \\
&= R[(\cos\theta+2)\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3+(\sin\theta+1)\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3] = \\
&= R[(\cos\theta+2)(-\mathbf{e}_2)+(\sin\theta+1)\mathbf{e}_1] = \\
&= R[(\sin\theta+1)\mathbf{e}_1-(\cos\theta+2)\mathbf{e}_2]
\end{aligned}$$

In definitiva la forza $\mathbf{F}_2$ è data da

$$\mathbf{F}_2 = \lambda(P-O)\times\mathbf{e}_3 = \lambda R[(\sin\theta+1)\mathbf{e}_1-(\cos\theta+2)\mathbf{e}_2]$$

e le sue componenti sono:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}_2)_t &= \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{t} = \lambda R[(\sin\theta + 1)\mathbf{e}_1 - (\cos\theta + 2)\mathbf{e}_2] \cdot (-\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2) = \\
&= \lambda R[(\sin\theta + 1)(-\sin\theta) - (\cos\theta + 2)\cos\theta] = \\
&= \lambda R[-\sin^2\theta - \sin\theta - \cos^2\theta - 2\cos\theta] = -\lambda R(2\cos\theta + \sin\theta + 1) \\
(\mathbf{F}_2)_n &= \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n} = \lambda R[(\sin\theta + 1)\mathbf{e}_1 - (\cos\theta + 2)\mathbf{e}_2] \cdot (-\cos\theta \mathbf{e}_1 - \sin\theta \mathbf{e}_2) = \\
&= \lambda R[(\sin\theta + 1)(-\cos\theta) - (\cos\theta + 2)(-\sin\theta)] = \\
&= \lambda R[-\cos\theta\sin\theta - \cos\theta + \cos\theta\sin\theta + 2\sin\theta] = -\lambda R(\cos\theta - 2\sin\theta) \\
(\mathbf{F}_2)_b &= \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{b} = \lambda R[(\sin\theta + 1)\mathbf{e}_1 - (\cos\theta + 2)\mathbf{e}_2] \cdot \mathbf{e}_3 = 0
\end{aligned}$$

Adesso abbiamo tutti gli elementi per scrivere l'equazione pura del moto, che è data da

$$\begin{aligned}
m\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} &= mR\ddot{\theta} = (\mathbf{F} + \boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{t} = (m\mathbf{g} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{t} = \\
&= -mg\cos\theta + 2kR(\cos\theta + \sin\theta) - \lambda R(2\cos\theta + \sin\theta + 1) = \\
&= R\left[(-\frac{mg}{R} + 2k - 2\lambda)\cos\theta + (2k - \lambda)\sin\theta - \lambda\right]
\end{aligned}$$

ovvero:

$$\boxed{m\ddot{\theta} = (-\tfrac{mg}{R} + 2k - 2\lambda)\cos\theta + (2k - \lambda)\sin\theta - \lambda}$$

Allo stesso modo possiamo determinare la reazione vincolare:

$$\begin{aligned}
m\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} &= mR\dot{\theta}^2 = (\mathbf{F} + \boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n} = (m\mathbf{g} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{n} = \\
&= mg\sin\theta + kR(2\cos\theta - 2\sin\theta + 1) - \lambda R(\cos\theta - 2\sin\theta) + \phi_n = \\
&= (2kR - \lambda R)\cos\theta + (mg - 2kR + 2\lambda R)\sin\theta + kR + \phi_n
\end{aligned}$$

da cui

$$\boxed{\phi_n = mR\dot{\theta}^2 - (2kR - \lambda R)\cos\theta - (mg - 2kR + 2\lambda R)\sin\theta - kR}$$

E per la componente binormale:

$$m\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 = (\mathbf{F} + \boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{b} = (m\mathbf{g} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{b} = \phi_b$$

da cui

$$\boxed{\phi_b = 0}$$

Determiniamo ora le posizioni di equilibrio. Bisogna cercare una soluzione stazionaria dell'equazione pura del moto, ovvero una soluzione del tipo $\theta(t) = \theta_0$, ovvero:

$$(-\frac{mg}{R} + 2k - 2\lambda)\cos\theta_0 + (2k - \lambda)\sin\theta_0 - \lambda = 0$$

sostituendo le relazioni $\lambda = 2k$ e $mg = 2kR$ l'equazioni si semplifica in

$$\begin{aligned}
&(-2k + 2k - 4k)\cos\theta_0 + (2k - 2k)\sin\theta_0 - 2k \\
= \; &-2k(2\cos\theta_0 + 1) = 0
\end{aligned}$$

ovvero

$$\cos\theta_0 = -\frac{1}{2}$$

che ha soluzioni

$$\boxed{\theta_1 = +\tfrac{2}{3}\pi}$$

$$\boxed{\theta_2 = -\tfrac{2}{3}\pi}$$

La reazione vincolare, con le relazioni tra λ, k e mg diventa:

$$\begin{aligned}\phi_n &= -(2kR-2kR)\cos\theta_0 - (2kR-2kR+4kR)\sin\theta_0 - kR = \\ &= -kR(4\sin\theta_0+1)\end{aligned}$$

che nei due punti di equilibrio trovati diventa

$$\boxed{\phi_n^{(1)} = -kR(+2\sqrt{3}+1)}$$

$$\boxed{\phi_n^{(2)} = -kR(-2\sqrt{3}+1)}$$