

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SALERNO

Matematica I - 03/06/2013

Facoltà di Ingegneria

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 6 crediti risolvano i quesiti:

1,2,3,7,8.

Gli studenti che devono sostenere l'esame da 9 crediti risolvano i quesiti:

1,2,3,4,5,6.

Per ogni quesito dare adeguate spiegazioni.

1. Calcolare:

$$\sqrt{\frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}}$$

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{(e^{2x} - 2) \operatorname{tg}(x^4)}.$$

3. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico:

$$f(x) = \arctan(e^x)$$

4. Considerare i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4 :

$$V = \langle (1, 0, 1, 0), (1, -1, -1, 0), (1, 1, 3, 0) \rangle$$

e

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_1 + x_3 = 0\}.$$

a) Determinare la dimensione, una rappresentazione cartesiana e una base ortonormale di $V \cap W$.

b) Determinare la dimensione, una rappresentazione cartesiana e una base ortonormale di $V + W$.

c) Dire, motivando la risposta, se V e W sono in somma diretta.

5. Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo definito da

$$f(x, y, z, t) = (x - y + 2z - 2t, y - z + 2t, x + z, x + y + 2t)$$

a) calcolare la dimensione e una base ortonormale di $\ker f$;

b) calcolare una rappresentazione cartesiana di $\operatorname{Im} f$.

6. Dato il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} hx + y - z = 2 \\ 6x - 2hy + hz = -1 \\ hx + 2y = 1 \end{cases}$$

- a) discuterne la compatibilità e calcolarne le eventuali soluzioni di $h \in \mathbb{R}$;
- b) per $h = -1$, dire se la matrice A dei coefficienti del sistema lineare è diagonalizzabile su \mathbb{R} e su \mathbb{C} ;
- c) per $h = -1$, calcolare la dimensione e una base di ogni autospazio reale di A .

7. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int e^x \sin x \cos x dx$$

8. Determinare il carattere della seguente serie numerica e se possibile calcolarne la somma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1}$$