

# Contenuti

<b>1</b>	<b>Integrali multipli</b>	<b>2</b>
1.1	Integrali doppi su domini normali . . . . .	2
1.2	Cambiamento di variabili in un integrale doppio .	6
1.3	Formula di Gauss-Green nel piano e conseguenze .	7
1.4	Integrali tripli . . . . .	15

# Capitolo 1

## Integrali multipli

### 1.1 Integrali doppi su domini normali

**Definizione 1.1.1** Si definisce **dominio normale rispetto all'asse  $x$**  l'insieme  $D_x$  dei punti del piano le cui coordinate  $(x, y)$  soddisfano le seguenti limitazioni

$$a \leq x \leq b \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x),$$

dove  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  sono funzioni definite nell'intervallo  $[a, b]$  e ivi continue, con  $\alpha(x) < \beta(x)$  nei punti interni di  $[a, b]$  (vedi figura 1.1). Premesso ciò, se  $f(x, y)$  è una funzione definita in  $D_x$  e ivi continua, per l'integrale doppio esteso a  $D_x$  della  $f(x, y)$ , sussiste la seguente formula di riduzione

$$\int \int_{D_x} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy. \quad (1.1)$$

**Definizione 1.1.2** Si definisce **dominio normale rispetto all'asse  $y$**  l'insieme  $D_y$  dei punti del piano le cui coordinate  $(x, y)$  soddisfano le seguenti limitazioni

$$c \leq y \leq d \quad \gamma(y) \leq x \leq \delta(y),$$

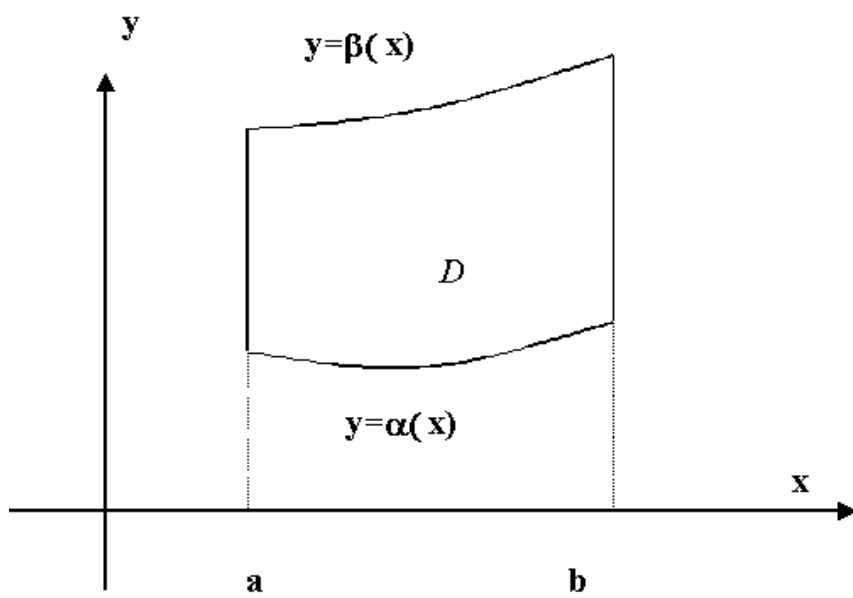


Figura 1.1:

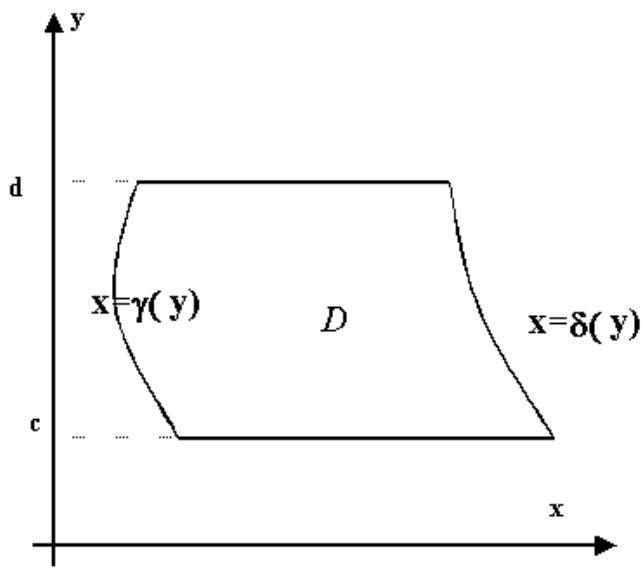


Figura 1.2:

dove  $\gamma(y)$  e  $\delta(y)$  sono funzioni definite nell'intervallo  $[c, d]$  e ivi continue, con  $\gamma(y) < \delta(y)$  nei punti interni di  $[a, b]$  (vedi figura 1.2). Se la funzione  $f(x, y)$  è definita in  $D_y$  e ivi continua, sussiste la seguente formula di riduzione

$$\int \int_{D_y} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx. \quad (1.2)$$

**Definizione 1.1.3** Se il dominio  $D$  è normale rispetto a tutti e due gli assi sussistono simultaneamente le formule (1.1) e (1.2), per cui abbiamo la seguente formula di **inversione dell'ordine di integrazione**

$$\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx. \quad (1.3)$$

Le formule di calcolo precedentemente illustrate possono essere utilizzate anche quando il dominio  $D$ , pur non essendo normale ad alcun asse, è però decomponibile in  $n$  domini normali  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , a due a due privi di punti interni comuni. In tal caso si ha la seguente relazione

$$\begin{aligned} \int \int_D f(x, y) dx dy &= \int \int_{D_1} f(x, y) dx dy + \\ &+ \int \int_{D_2} f(x, y) dx dy + \dots + \int \int_{D_n} f(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (1.4)$$

**Esercizio 1.1.4** Si calcoli i seguenti integrali riconducendoli a integrali semplici

$$\int \int_D \frac{1}{(x+y)^2} dx dy, \quad \text{dove } D = [3, 4] \times [1, 2].$$

$$\int \int_D \frac{\sin^2 y}{y} dx dy, \quad \text{dove } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2, 0 < y \leq \sqrt{\pi}\}.$$

## 1.2 Cambiamento di variabili in un integrale doppio

Sia  $\Omega$  aperto misurabile di  $\mathbb{R}^2$  e si consideri la trasformazione biunivoca tra  $\Omega$  e  $D$

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in \Omega. \quad (1.5)$$

Supponiamo le funzioni (1.5) di classe  $C^1(\Omega)$  e il determinante jacobiano  $J$  della trasformazione sempre diverso da zero,

$$J = \det \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial u} & \frac{\partial\phi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.6)$$

In tali ipotesi vale la seguente formula di trasformazione dell'integrale doppio

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{\Omega} f[\phi(u, v), \psi(u, v)] |J| du dv, \quad (1.7)$$

di cui si omette la dimostrazione.

Nel caso particolare del passaggio dalle coordinate cartesiane  $(x, y)$  alle coordinate polari  $(\rho, \theta)$ , avendosi

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad (1.8)$$

con  $\rho > 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ , oppure  $\theta \in [-\pi, \pi)$ , il determinante jacobiano è  $J = \rho > 0$  e la formula (1.7) diviene

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (1.9)$$

Il passaggio alle coordinate polari è preferibile quando sia l'espressione della funzione  $f(x, y)$  e sia le limitazioni che definiscono il dominio  $D$  contengono l'espressione  $x^2 + y^2$ .

## 1.3 Formula di Gauss-Green nel piano e conseguenze

**Definizione 1.3.1** *Un dominio regolare  $D \in \mathbb{R}^2$  è per definizione l'unione di un numero finito di domini normali (rispetto a  $x$  o  $y$ ) regolari  $D_1, \dots, D_N$ , a due a due privi di punti interni in comune.*

Se  $D$  è dominio regolare, la sua frontiera  $\partial D$  è unione di un numero finito di curve regolari. Per tutti i punti di  $\partial D$ , eccetto al più un numero finito di essi, esiste **il versore tangente  $\mathbf{t}$** .

Su ogni curva di  $\partial D$ , **il versore normale  $\mathbf{n}$**  associato a  $\mathbf{t}$  è tale che la coppia  $\{\mathbf{n}, \mathbf{t}\}$  sia congruente a quella dei versori degli assi orientati (vedi figura 1.3).

Si conviene di **orientare la frontiera  $\partial D$**  in maniera tale che il versore normale  $\mathbf{n}$ , così individuato, risulti in ogni punto diretto verso l'esterno di  $\partial D$ . Tale orientamento è detto **orientamento positivo** (si indica con  $\partial D^+$ ). In altre parole, su ciascuna delle curve che compongono la frontiera di  $D$ , si fissa come orientamento positivo quello secondo il quale deve muoversi un osservatore per avere sempre alla sua sinistra l'interno di  $D$ .

Sia  $D$  un dominio regolare e sia

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (1.10)$$

una rappresentazione parametrica di una porzione regolare  $\gamma$  della sua frontiera  $\partial D$ . Supponiamo l'orientamento indotto dalla rappresentazione (1.10) sia quello positivo su  $\partial D$ . In tal caso, il versore tangente  $\mathbf{t}$  è il vettore di  $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{t}(t) = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \mathbf{i} + \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \mathbf{j}.$$

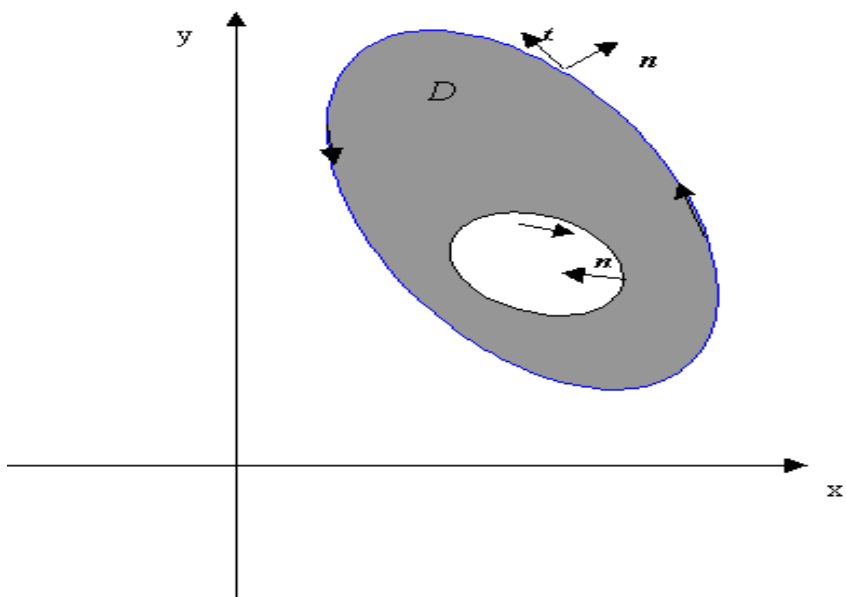


Figura 1.3:



Il versore normale corrispondente è

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \mathbf{i} - \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \mathbf{j}.$$

**Esempio 1.3.2** Considerata la circonferenza centrata nell'origine del sistema di riferimento e di raggio unitario, il versore tangente è

$$\mathbf{t}(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j},$$

e il versore normale è

$$\mathbf{n}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}.$$

Il seguente teorema, permette di trasformare un integrale doppio esteso ad un dominio regolare in un integrale curvilineo esteso alla frontiera di tale dominio:

**Teorema 1.3.3** (Formule di Gauss-Green nel piano) Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio regolare, ed  $f = f(x, y)$  una funzione di classe  $C^1(D)$ . Allora

$$\int \int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D^+} f dy, \quad (1.11)$$

e

$$\int \int_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial D^+} f dx. \quad (1.12)$$

**Dim.** Per semplicità, si dimostrerà solo la (1.11) nel caso particolare che il dominio  $D$  sia normale rispetto a  $y$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}.$$

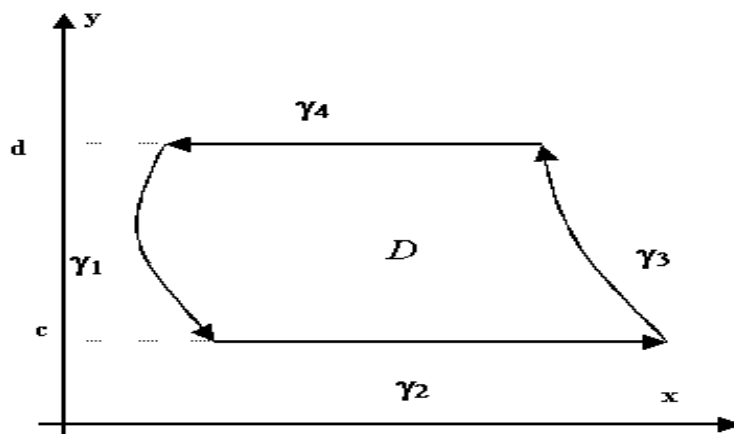


Figura 1.4:

Applicando le formule di riduzione, si ricava

$$\begin{aligned} \int \int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \frac{\partial f}{\partial x} dx = & (1.13) \\ &= \int_c^d [f(\delta(y)) - f(\gamma(y))] dy. \end{aligned}$$

D'altra parte, la frontiera  $\partial D$  percorsa nel verso positivo si compone della curva  $\gamma_1$ , del segmento  $\gamma_2$ , della curva  $\gamma_3$  e del segmento  $\gamma_4$  come descritto nella figura 1.4. Poichè  $y$  è costante sui tratti  $\gamma_2$  e  $\gamma_4$ , risulta banalmente che

$$\int_{\gamma_2} f dy = 0, \int_{\gamma_4} f dy = 0.$$

Gli integrali lungo  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  sono uguali a

$$\int_{\gamma_1} f dy = - \int_c^d f(\gamma(y), y) dy$$

e

$$\int_{\gamma_3} f dy = \int_c^d f(\delta(y), y) dy.$$

In conclusione, si ottiene che

$$\begin{aligned} \int_{\partial D^+} f dy &= \int_{\gamma_3} f dy + \int_{\gamma_1} f dy = \\ &= \int_c^d f(\delta(y), y) dy - \int_c^d f(\gamma(y), y) dy. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Le (1.13), (1.14) implicano la (1.11). La (1.12) si ottiene in maniera analoga. ■

Il teorema vale anche quando  $D$  è unione di un numero finito di domini regolari  $D_1, \dots, D_N$ , a due a due privi di punti interni in comune. Infatti, risulta che

$$\begin{aligned} \int \int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy &= \sum_i \int \int_{D_i} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \sum_i \int_{\partial D_i^+} f dy, \\ \int \int_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy &= \sum_i \int \int_{D_i} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \sum_i \int_{\partial D_i^+} f dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Inoltre, gli archi di curve appartenenti alla frontiera di due domini adiacenti compaiono due volte, ma con orientamento opposto. La somma di tali coppie di integrali è nulla, quindi

$$\begin{aligned} \sum_i \int_{\partial D_i^+} f dy &= \int_{\partial D^+} f dy \\ \sum_i \int_{\partial D_i^+} f dx &= \int_{\partial D^+} f dx. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Tramite le (1.15), (1.16) si ottengono le (1.11), (1.12).

Dalle formule di Gauss-Green, si ricava il seguente teorema

**Teorema 1.3.4** (Teorema della divergenza nel piano) Sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  dominio regolare. Sia  $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$  un campo vettoriale definito in  $D$  e di classe  $C^1(D)$ . Allora

$$\int \int_D \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (1.17)$$

(Si ricorda che  $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$ ,  $\mathbf{n}$  è il versore normale a  $\partial D$  e  $s$  è l'ascissa curvilinea)

**Dim.** Applicando la formula di Gauss-Green possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \int \int_D \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy &= \int \int_D \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \int_{\partial D} -F_2 dx + F_1 dy. \end{aligned} \quad (1.18)$$

D'altronde, se la frontiera di  $D$  è una curva regolare di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

si ha anche

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds &= \\ &= \int_a^b \left[ \frac{F_1 y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} - \frac{F_2 x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right] \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \\ &= \int_a^b F_1 y'(t) dt - \int_a^b F_2 x'(t) dt = \int_{\partial D^+} F_1 dy - F_2 dx. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Le equazioni (1.18) e (1.19) implicano la (1.17).

Se  $\partial D$  è unione di un numero finito di curve regolari a tratti, si ragiona come nella parte finale della dimostrazione delle formule di Gauss-Green, considerando  $D$  quale unione di domini normali regolari privi di punti interni comuni. ■

Inoltre,

**Proposizione 1.3.5** (*Formula di Stokes*) Sia  $\mathbf{F}(x, y) = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$  un campo vettoriale definito in un dominio regolare  $D$  e di classe  $C^1(D)$ . Allora risulta

$$\int_{\partial D^+} F_1 dx + F_2 dy = \int \int_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

**Dim.** La dimostrazione segue dalle formule di Gauss-Green.

■

Tramite il teorema della divergenza si dimostra il seguente risultato sulle forme differenziali, solo enunciato nel quarto capitolo:

**Teorema 1.3.6** (*Teorema sulle forme differenziali in un aperto semplicemente connesso*) Sia  $\omega(x, y) = F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$  una forma differenziale lineare di classe  $C^1$  definita in un aperto  $A$  semplicemente connesso. Se la forma è chiusa allora è anche esatta in  $A$ .

(Ricordiamo che un aperto connesso  $A$  si dice **semplicemente connesso** se ogni curva  $\gamma$  regolare a tratti, semplice e chiusa contenuta in  $A$  è la frontiera di un dominio limitato  $D$  interamente contenuto in  $A$ ).

**Dim.** Sia fissata una qualsiasi curva regolare, semplice e chiusa  $\gamma$ . Sia  $D$  il dominio limitato di cui  $\gamma$  è frontiera. Non è restrittivo supporre  $\gamma$  orientata nel verso positivo (senso antiorario). Allora utilizzando la formula di Stokes e, ricordando che

la forma è chiusa, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy &= \int_{\partial D} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy = \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

■

**Proposizione 1.3.7** (*Formula di integrazione per parti*) Sia  $D$  un dominio regolare limitato di  $\mathbb{R}^2$  e siano  $f$  e  $g$  funzioni di classe  $C^1(D)$ . Allora risulta

$$\iint_D f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D^+} f g dy - \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} g dx dy,$$

e

$$\iint_D f \frac{\partial g}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial D^+} f g dx - \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} g dx dy.$$

**Dim.** Si deducono facilmente dalle (1.11, 1.12), utilizzando  $f g$  in luogo di  $f$ . ■

**Proposizione 1.3.8** (*Formula per il calcolo dell'area*) Sia  $D$  un dominio regolare limitato di  $\mathbb{R}^2$ ; si ha

$$A(D) = \iint_D dx dy = \int_{\partial D} x dy, \quad (1.20)$$

o anche

$$A(D) = \iint_D dx dy = - \int_{\partial D} y dx. \quad (1.21)$$

Inoltre,

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx.$$

**Dim.** La (1.20) si ottiene dalla (1.11) utilizzando  $f(x, y) = x$ , mentre la (1.21) segue dalla (1.11) per  $f(x, y) = y$ . ■

**Esempio 1.3.9** Calcolare l'area  $A(D)$  del dominio avente come frontiera l'ellisse

$$\gamma : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} .$$

Si ricava

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

## 1.4 Integrali tripli

**Definizione 1.4.1** Si dice che un insieme  $H \subset \mathbb{R}^3$  è un **dominio normale rispetto al piano  $xy$**  se esso può essere rappresentato nella forma

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\},$$

con  $A$  dominio normale del piano  $xy$  e  $\alpha(x, y), \beta(x, y)$  funzioni continue su  $A$  tali che  $\alpha(x, y) < \beta(x, y)$  per ogni punto  $(x, y)$  interno di  $A$ .

**Proposizione 1.4.2** (Formula di riduzione) Sia  $f(x, y, z)$  è una funzione continua su un dominio normale rispetto al piano  $xy$ . Vale la seguente formula di riduzione

$$\int \int \int_H f(x, y, z) dx dy dz = \int \int_A dx dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

che riduce l'integrale triplo in un integrale semplice rispetto la variabile  $z$  ed a un integrale doppio rispetto le variabili  $x, y$ .

Analogamente si ragiona nel caso di domini normali rispetto al piano  $yz$ , oppure al piano  $zx$ .

**Proposizione 1.4.3** (*Cambiamento di variabili*) Sia

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w) \\ y &= y(u, v, w) \\ z &= z(u, v, w) \end{aligned} \quad (u, v, w) \in B$$

tale che

1) sia un'applicazione di classe  $C^1(B)$  e biunivoca da  $B$  alla sua immagine  $A$  dello spazio  $xyz$

2) il determinante Jacobiano  $J = \det \partial(x, y, z) / \partial(u, v, w)$  non si annulli in nessun punto di  $B$ .

Allora, risulta

$$\begin{aligned} & \int \int \int_A f(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \int \int \int_B f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du dv dw. \end{aligned}$$

Caso particolare è la trasformazione in **coordinate sferiche**

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} ,$$

il cui significato geometrico è illustrato nella figura 1.5. Il determinante Jacobiano di tale trasformazione è

$$J = \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \sin \phi.$$

Altro esempio è la trasformazione in **coordinate cilindriche** (vedi figura 1.6):

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} ,$$



e il determinante Jacobiano, in questo caso, è

$$J = \det \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\rho, \theta, z)} = \rho.$$

**Esempio 1.4.4** Sia  $T$  il tetraedro delimitato dai piani coordinati  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  e dal piano obliquo di equazione

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

La retta del piano  $xy$  che unisce i punti di coordinate  $(a, 0, 0)$  e  $(0, b, 0)$  ha equazione  $\left(\frac{x}{a}\right) + \left(\frac{y}{b}\right) = 1$ . Il tetraedro  $T$  risulta normale rispetto al piano  $xy$ , e precisamente

$$T = \left\{ 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b \left(1 - \frac{x}{a}\right), 0 \leq z \leq c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \right\}.$$

da cui, si ricava che il volume di  $T$ ,  $V(T)$ , è

$$\begin{aligned} V(T) &= \int \int \int_T dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} dz = \\ &= \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) dy = \\ &= c \int_0^a dx \left[ \left(1 - \frac{x}{a}\right) y - \frac{y^2}{2b} \right]_{y=0}^{y=b(1-\frac{x}{a})} = \frac{bc}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 dx = \\ &= \frac{bc}{2} \left[ -\frac{a}{3} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^3 \right]_{x=0}^{x=a} = \frac{abc}{6}. \end{aligned}$$

**Esempio 1.4.5** Si consideri un solido omogeneo di forma tetraedrica  $T$  e di spigoli  $a = b = c = 1$ . E' facile calcolare le coordinate del

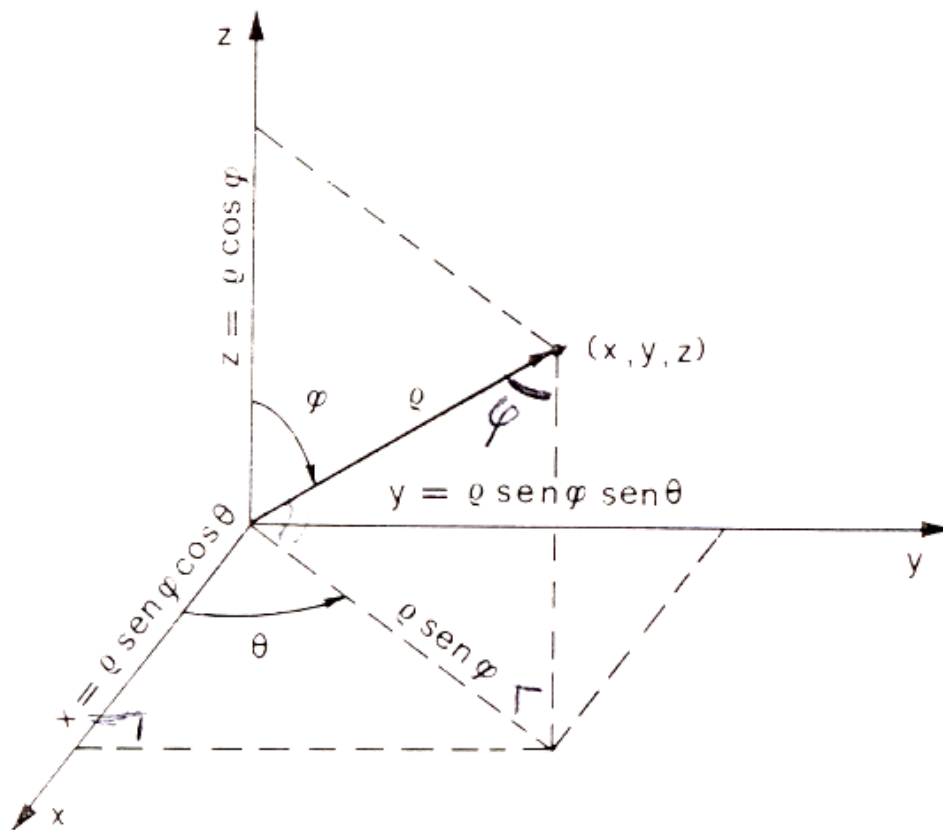


Figura 1.5:

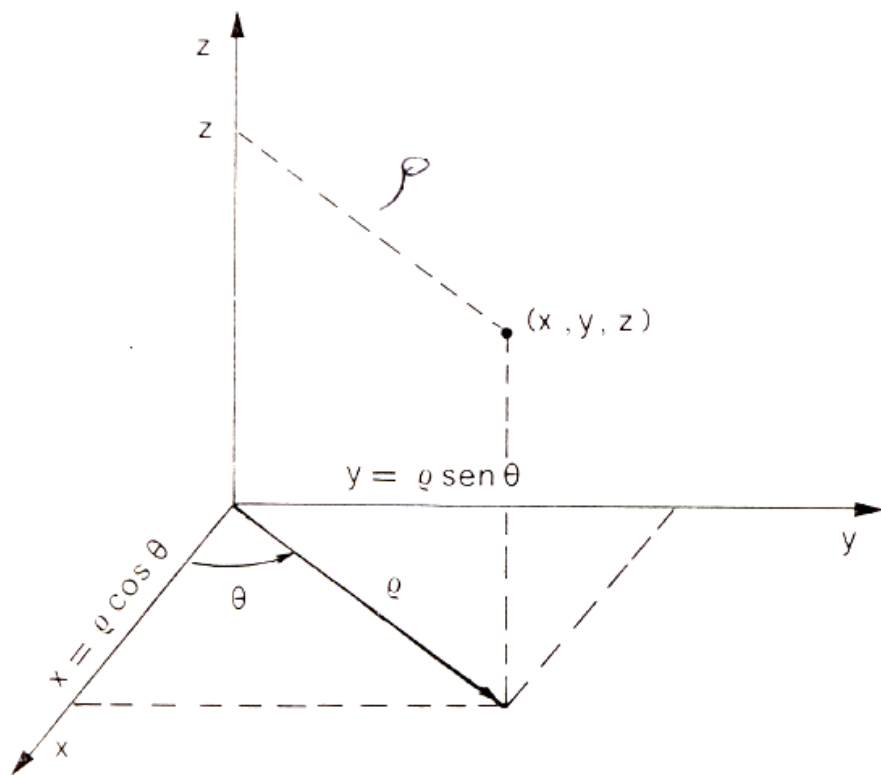


Figura 1.6:

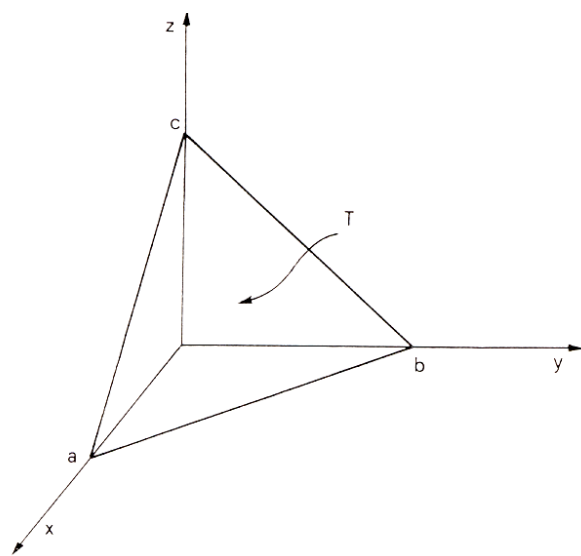


Figura 1.7:

baricentro (centro di massa). Infatti, per motivi di simmetria il baricentro ha coordinate  $(x_G, y_G, z_G)$  e quindi

$$x_G = y_G = z_G = \frac{1}{V(T)} \int \int \int_T x dx dy dz = 6 \int \int \int_T x dx dy dz = \frac{1}{4}.$$