

Contenuti

1	Superfici e integrali di superficie	2
1.1	Superfici regolari	2
1.2	Piano tangente e retta normale ad una superficie regolare	6
1.3	Area di una superficie	9
1.4	Superficie di rotazione e teorema di Guldino	13
1.5	Integrali di superficie di prima specie	17
1.6	Applicazioni meccaniche	19
1.7	Integrali di superficie di seconda specie	22
1.8	Teoremi della divergenza e di Stokes nello spazio	24

Capitolo 1

Superfici e integrali di superficie

1.1 Superfici regolari

Siano

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v) \quad (1.1)$$

tre funzioni reali definite e continue in un dominio limitato e connesso D di \mathbb{R}^2 (un **dominio connesso** di \mathbb{R}^n è la chiusura di un aperto connesso).

Interpretando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali di un punto P dello spazio \mathbb{R}^3 , al variare di (u, v) in D , il corrispondente punto $P(f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ descrive in \mathbb{R}^3 un luogo geometrico S , detto **superficie**. Le variabili (u, v) sono dette parametri di S . Le equazioni

$$\begin{cases} x = f_1(u, v) \\ y = f_2(u, v) \\ z = f_3(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D$$

sono chiamate **equazioni parametriche** della superficie S .

Siano $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori degli assi x, y, z e sia O l'origine delle coordinate nello spazio. In forma vettoriale una superficie è rappresentata

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= P(u, v) - O = \\ &= f_1(u, v)\mathbf{i} + f_2(u, v)\mathbf{j} + f_3(u, v)\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (u, v) \in D. \quad (1.2)$$

Definizione 1.1.1 Dato un dominio limitato connesso D del piano, è detta **superficie regolare** l'insieme dei punti dello spazio che soddisfano l'equazione (1.2) in cui f_1, f_2, f_3 verificano le seguenti condizioni di regolarità:

- (i) f_1, f_2, f_3 sono di classe C^1 in D ,
- (ii) la funzione

$$\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3 : \phi(u, v) \equiv (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$$

è invertibile per ogni punto interno di D (su $\overset{\circ}{D}$),

(iii) il rango della matrice jacobiana è 2 in ogni punto interno di D , cioè

$$rk \frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (u, v)} = rk \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2. \quad (1.3)$$

Definizione 1.1.2 L'insieme dei punti di S corrispondenti ai punti della frontiera di D è detto **bordo** di S e si indica con ∂S .

Definizione 1.1.3 Sia S una superficie regolare di equazione vettoriale (1.2). Siano (u_0, v_0) un punto interno di D e $P_0 = P(f_1(u_0, v_0), f_2(u_0, v_0), f_3(u_0, v_0))$ il corrispondente punto su S .

La curva γ_u tracciata sulla superficie S e passante per il punto P_0 di equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(u, v_0) = f_1(u, v_0)\mathbf{i} + f_2(u, v_0)\mathbf{j} + f_3(u, v_0)\mathbf{k}, \quad (u, v_0) \in \overset{\circ}{D},$$

è detta **curva coordinata di tipo u** sulla superficie S , mentre la curva γ_v di equazione vettoriale

$$\mathbf{r}(u_0, v) = f_1(u_0, v)\mathbf{i} + f_2(u_0, v)\mathbf{j} + f_3(u_0, v)\mathbf{k}, \quad (u_0, v) \in \overset{\circ}{D}$$

è detta **curva coordinata di tipo v** sulla superficie S

Definizione 1.1.4 I vettori tangenti alle curve coordinate γ_u e γ_v passanti per P_0 sono rispettivamente

$$\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) = \frac{\partial f_1(u_0, v_0)}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial f_2(u_0, v_0)}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial f_3(u_0, v_0)}{\partial u}\mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{r}'_v(u_0, v_0) = \frac{\partial f_1(u_0, v_0)}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial f_2(u_0, v_0)}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial f_3(u_0, v_0)}{\partial v}\mathbf{k}.$$

La condizione di regolarità (iii) espressa dall'equazione (1.3) è equivalente alla condizione che i vettori tangenti \mathbf{r}'_u e \mathbf{r}'_v siano linearmente indipendenti (per ogni $(u, v) \in \overset{\circ}{D}$). In altre parole, la condizione (iii) della definizione di superficie regolare è equivalente alla condizione

(iii') il prodotto vettoriale $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ deve essere non nullo per ogni punto interno a D .

Esempio 1.1.5 Siano $D = [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ e $r > 0$. La superficie sferica S di centro l'origine del sistema di riferimento e raggio r è definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} x(\phi, \theta) = r \sin \phi \cos \theta, \\ y(\phi, \theta) = r \sin \phi \sin \theta, \\ z(\phi, \theta) = r \cos \phi, \end{cases} \quad (\phi, \theta) \in D\}.$$

Si dimostra facilmente che S rappresenta una superficie regolare. Inoltre, i vettori tangenti alle curve coordinate $\gamma_\phi, \gamma_\theta$ sono

$$\mathbf{r}'_\phi = r \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + r \cos \phi \sin \theta \mathbf{j} - r \sin \phi \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'_\theta = -r \sin \phi \sin \theta \mathbf{i} + r \sin \phi \cos \theta \mathbf{j},$$

e, perciò,

$$\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_\theta = r^2 \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + r^2 \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + r^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}$$

Tale prodotto vettoriale è nullo se e solo se

$$\sin \phi = 0 \Leftrightarrow \phi = 0, \pi$$

ma i punti corrispondenti a tali valori di $\phi \notin \overset{\circ}{D}$. In conclusione, $\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_\theta \neq \mathbf{0} \quad \forall (\phi, \theta) \in \overset{\circ}{D}$.

Esempio 1.1.6 Siano $D = [-r, r] \times [0, 2\pi]$, $r > 0$. La superficie definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} x(u, \theta) = u \cos \theta \\ y(u, \theta) = u \sin \theta \\ z(u, \theta) = \lambda u \end{cases} \quad (u, \theta) \in D\}.$$

Se $\lambda \neq 0$, la superficie S è un cono a due falde, mentre se $\lambda = 0$, S è un cerchio nel piano xy . La superficie S non è regolare. Infatti, la funzione $\phi : D \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ definita da $\phi(u, v) \equiv (u \cos \theta, u \sin \theta, \lambda u)$ non è iniettiva poichè $\phi(0, \theta) = (0, 0, 0)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$.

Inoltre, non è verificata neppure la condizione di regolarità (iii'); infatti

$$\mathbf{r}'_u = \cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j} + \lambda \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'_v = -u \sin v \mathbf{i} + u \cos v \mathbf{j},$$

allora

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = -ku \cos v \mathbf{i} - ku \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k},$$

e, quindi,

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = 0 \quad \forall (u, v) \in \overset{\circ}{D}.$$

1.2 Piano tangente e retta normale ad una superficie regolare

Sia S una superficie regolare di equazione vettoriale (1.2). Sia P_0 un punto di S corrispondente a $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{D}$.

Proposizione 1.2.1 *Le rette tangenti in P_0 alle curve regolari tracciate sulla superficie S e passanti per P_0 sono contenute in un medesimo piano.*

Questo piano è detto **piano tangente alla superficie S in P_0** ed è ortogonale al vettore

$$\mathbf{N}(u_0, v_0) = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)$$

Dim. Sia $\alpha : [a, b] \rightarrow \overset{\circ}{D}$ $\alpha(t) \equiv (u(t), v(t))$ un' arbitraria curva regolare passante per (u_0, v_0) e sia $t_0 \in [a, b]$ il valore del parametro t tale che $\alpha(t_0) \equiv (u_0, v_0)$. La curva di equazione vettoriale

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(u(t), v(t)) = \\ &= f_1(u(t), v(t))\mathbf{i} + f_2(u(t), v(t))\mathbf{j} + f_3(u(t), v(t))\mathbf{k} \end{aligned}$$

passa per il punto P_0 e giace completamente sopra la superficie S . Il vettore tangente a tale curva è

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} u' + \frac{\partial f_1}{\partial v} v' \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u} u' + \frac{\partial f_2}{\partial v} v' \right) \mathbf{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial u} u' + \frac{\partial f_3}{\partial v} v' \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Il vettore tangente alla curva assegnata in P_0 è combinazione lineare dei vettori tangenti alle curve coordinate

$$\frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt} = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0) u'(t_0) + \mathbf{r}'_v(u_0, v_0) v'(t_0).$$

In conclusione, il vettore tangente ad una qualsiasi curva di S passante per P_0 è parallelo al piano ortogonale al vettore $\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$. ■

Definizione 1.2.2 *L'equazione del piano tangente alla superficie S in $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ è*

$$(P - P_0) \cdot \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = 0$$

o equivalentemente

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1.4)$$

dove

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix}, B = - \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

E' ovvio che

$$A^2 + B^2 + C^2 = (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)^2.$$

Definizione 1.2.3 *Il versore*

$$\mathbf{n}(P_0) = \frac{\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)}{|\mathbf{r}'_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}'_v(u_0, v_0)|} \quad (1.5)$$

è ortogonale al piano tangente ed è detto **versore normale** alla superficie S in P_0 .

Esempio 1.2.4 *Sia D un dominio limitato e connesso del piano e sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 in D .*

La superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che} \quad (x, y) \in D \quad \text{e} \quad z = f(x, y) \}$$

verifica le condizioni di regolarità (i), (ii), (iii').

*I vettori **tangenti alle curve coordinate** γ_x e γ_y passanti per P sono*

$$\mathbf{r}'_x = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'_y = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k},$$

quindi risulta sempre $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}'_y \neq \mathbf{0}$.

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 = f(x_0, y_0)$ un punto di S . L'equazione del piano tangente a S in P_0 è

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

La retta normale a S nel punto $P_0 \in S$ è parallela al vettore

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_x(x_0, y_0) \times \mathbf{r}'_y(x_0, y_0) &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}. \end{aligned}$$

1.3 Area di una superficie

Definizione 1.3.1 Sia D dominio connesso regolare e sia S una superficie regolare di equazione vettoriale (1.2). Sia $P_0 \in S$ e sia $\gamma = \gamma(t)$ una curva contenuta in S e passante per P_0 . L'inclusione di $\gamma \subset S$ implica l'esistenza di una funzione $\alpha: t \in [a, b] \rightarrow (u = u(t), v = v(t)) \in D$ tale che

$$\begin{aligned} P \in \gamma &\Leftrightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) = P - O = \\ &= f_1(u(t), v(t)) \mathbf{i} + f_2(u(t), v(t)) \mathbf{j} + f_3(u(t), v(t)) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $P(t_0) = P_0$. Il vettore tangente a γ in P_0 è

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial f_2}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial f_3}{\partial u} \mathbf{k} \right) u'(t) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \mathbf{k} \right) v'(t) = \\ &= \mathbf{r}_u u'(t) + \mathbf{r}_v v'(t), \end{aligned}$$

e il suo modulo è

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{(\mathbf{r}_u u' + \mathbf{r}_v v') \cdot (\mathbf{r}_u u' + \mathbf{r}_v v')} = \\ &= \sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2}, \end{aligned}$$

dove

$$E(u, v) = |\mathbf{r}'_u(u, v)|^2, \quad G(u, v) = |\mathbf{r}'_v(u, v)|^2$$

$$F(u, v) = \mathbf{r}'_u(u, v) \cdot \mathbf{r}'_v(u, v).$$

Definizione 1.3.2 La lunghezza della curva γ contenuta in S è data da

$$L(\gamma) = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2} dt.$$

Il quadrato ds^2 dell'elemento di lunghezza ds sulla superficie S è

$$\begin{aligned} ds^2 &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \right] = \\ &= E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Vale la seguente identità

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|^2 &= |\mathbf{r}'_u|^2 |\mathbf{r}'_v|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \\ &= |\mathbf{r}'_u|^2 |\mathbf{r}'_v|^2 - (\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v)^2 = EG - F^2, \end{aligned}$$

dove θ è l'angolo compreso tra $\mathbf{r}'_u(u, v)$ e $\mathbf{r}'_v(u, v)$.

In conclusione, la forma quadratica definita in (1.6) è definita positiva poichè per ogni $(u, v) \in D$

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|^2 > 0,$$

Definizione 1.3.3 *L'espressione*

$$d\sigma = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (1.7)$$

è detto elemento d' **area** della superficie regolare S .

Definizione 1.3.4 *Si chiama **area** $A(S)$ della superficie regolare S il numero*

$$A(S) = \int \int_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Esempio 1.3.5 *Siano $D = [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$ ed $r > 0$ e sia*

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases} \quad (\phi, \theta) \in D,$$

l'equazione parametrica della superficie sferica.

Come visto in precedenza, risulta

$$\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_\theta = r^2 \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + r^2 \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + r^2 \sin^2 \phi \cos \phi \mathbf{k}.$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'_\phi \times \mathbf{r}'_\theta| &= r^2 \sqrt{\sin^4 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \phi \cos^2 \phi} = \\ &= r^2 \sqrt{\sin^2 \phi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)} = r^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} A(S) &= \int \int_D r^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\pi} r^2 \sin \phi \, d\phi = \\ &= r^2 \int_{-\pi}^{\pi} [-\cos \phi]_0^{\pi} d\theta = 2r^2 [\theta]_{-\pi}^{\pi} = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Esempio 1.3.6 Siano D un dominio limitato e connesso del piano, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 in D e

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che} \quad (x, y) \in D \quad \text{e} \quad z = f(x, y)\}$$

Per quanto detto nel paragrafo precedente, si ottiene

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

L'area della superficie S è

$$\begin{aligned} A(S) &= \int \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dx \, dy = \\ &= \int \int_D \sqrt{|\nabla f|^2 + 1} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Esempio 1.3.7 Siano γ la curva piana

$$\gamma(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} \quad \text{con} \quad u \in [a, b],$$

e S la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \\ z = v \end{cases} \\ \text{con} \quad u \in [a, b] \quad \text{e} \quad v \in [0, h] \}$$

I vettori tangenti alle curve coordinate sono

$$\mathbf{r}'_u = x'(u)\mathbf{i} + y'(u)\mathbf{j},$$

e

$$\mathbf{r}'_v = \mathbf{k}.$$

Da qui segue che

$$E = |\mathbf{r}'_u|^2 = x'^2(u) + y'^2(u),$$

$$F = \mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_v = 0,$$

$$G = |\mathbf{r}'_v|^2 = 1.$$

Pertanto, l'area di S è

$$\begin{aligned} A(S) &= \int \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv = \int \int_D \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} du dv = \\ &= \int_0^h dv \int_a^b \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} du = \int_0^h L(\gamma) dv = \\ &= L(\gamma) [v]_0^h = hL(\gamma), \end{aligned}$$

dove $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} du$ è la lunghezza di γ .

1.4 Superficie di rotazione e teorema di Guldino

E' possibile applicare il risultati ottenuti in precedenza per calcolare l'area di una superficie S generata dalla rotazione attorno all'asse r ($\equiv z$) di una curva γ .

Definizione 1.4.1 Sia γ una curva piana ed r una retta ad essa complanare. Si definisce **superficie di rotazione generata da γ** il luogo geometrico delle traiettorie descritte dai punti di γ durante una rotazione di un angolo α intorno all'asse r .

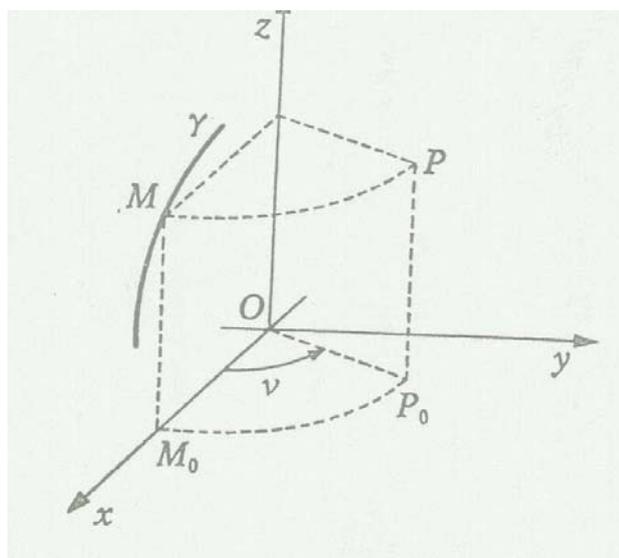


Figura 1.1:

Se $\gamma(t) = x(t)\mathbf{i} + z(t)\mathbf{k}$ è e sia

Sia z l'asse di rotazione e γ la curva piana contenuta nel piano x

$$\gamma(u) = x(u)\mathbf{i} + z(u)\mathbf{k} \quad \text{con } u \in [a, b],$$

e sia S la superficie di rotazione generata da γ

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} x = x(u) \cos \nu \\ y = x(u) \sin \nu \\ z = z(u) \end{cases}$$

con $u \in [a, b]$ e con $\nu \in [0, \alpha]$ }.

Tale superficie è regolare.

Le curve coordinate

$$\gamma_u = \{(x(u) \cos \nu_0, x(u) \sin \nu_0, z(u)) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{con } u \in [a, b] \},$$

$$\gamma_\nu = \{(x(u_0) \cos \nu, x(u_0) \sin \nu, z(u_0)) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{con } \nu \in [0, \alpha] \}.$$

sono dette rispettivamente **meridiani** e **paralleli**. I vettori tangenti a tali curve sono

$$\mathbf{r}'_u = x'(t) \cos \nu \mathbf{i} + x'(t) \sin \nu \mathbf{j} + z'(t) \mathbf{k},$$

e

$$\mathbf{r}'_\nu = -x(t) \sin \nu \mathbf{i} + x(t) \cos \nu \mathbf{j}.$$

I meridiani e i paralleli sono curve ortogonali, infatti $\mathbf{r}'_u \cdot \mathbf{r}'_\nu = 0$.

Teorema 1.4.2 (*Teorema di Guldino*) *L'area della superficie generata dalla rotazione di un angolo α di una curva regolare γ è data dalla lunghezza della curva ruotante, moltiplicata per la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto nella rotazione dal baricentro.*

Dim. Sia $I = [a, b]$ la base della curva γ . L'area $A(S)$ è data da

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{[a,b] \times [0,\alpha]} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| d\sigma = \int_0^\alpha d\nu \int_a^b x(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\ &= \alpha \int_\gamma x ds = \alpha L(\gamma) x^*, \end{aligned}$$

dove $x^* = \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x ds$ è la coordinata del baricentro G di γ e coincide con la distanza di G dall'asse di rotazione. Chiaramente αx^* coincide con la lunghezza di circonferenza descritta da G durante la rotazione, e da qui si ha la tesi. ■

Esempio 1.4.3 *E' possibile determinare l'area della sfera S di raggio r applicando il teorema di Guldino. Infatti, pensando la sfera come una superficie generata dalla rotazione attorno all'asse z della semicirconferenza di equazioni parametriche*

$$x(u) = r \cos u, \quad z(u) = r \sin u, \quad u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

La superficie S è

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} x = r \cos u \cos \nu \\ y = r \cos u \sin \nu \\ z = r \sin u \end{cases}$$

$$\text{con } u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e con } \nu \in [0, 2\pi] \quad \}.$$

L'area di tale superficie è

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} d\nu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos t \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt = \\ &= 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 2\pi r^2 [\sin t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

1.5 Integrali di superficie di prima specie

Sia S una **superficie regolare** definita nel dominio limitato e connesso D attraverso la rappresentazione parametrica

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \quad (1.8)$$

con $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Sia $\Delta = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ una suddivisione in superfici elementari, della superficie regolare S realizzata mediante le curve coordinate sulla superficie. Si denoti con ω_i l'area dell'elemento di superficie s_i e con d_i il diametro della più piccola sfera che contiene l'elemento di superficie S_i . Siano

$$\nu(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i.$$

e $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ un punto qualsiasi di S_i .

Sia $f(x, y, z)$ una funzione continua in un assegnato dominio D dello spazio e sia S una superficie regolare la quale sia interamente contenuta in D . Il valore della somma

$$\sigma(f, \Delta, N) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \omega_i, \quad (1.9)$$

dipende, in generale, sia dal modo in cui è suddivisa la superficie S e sia dai punti $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) scelti ad arbitrio nelle singole superfici in cui è stata suddivisa la superficie Σ . La sommatoria (1.9) ha per limite il numero reale I per $\nu(\Delta)$ tendente a zero, e si scrive

$$\lim_{\nu(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(f, \Delta, N) = \lim_{\nu(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \omega_i = I,$$

quando $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che per tutte le suddivisioni Δ di S in elementi di superficie s_i , tali che $\nu(\Delta) < \delta$, e comunque si scelgano i punti $N_i \in s_i$, risulti

$$|\sigma(f, \Delta, N) - I| < \epsilon.$$

Quando esiste tale limite, I si denota con il simbolo

$$I = \int \int_S f(x, y, z) d\sigma,$$

e si chiama **integrale di superficie di prima specie** esteso alla superficie S .

Se S ha la rappresentazione parametrica (1.8), allora sussiste la seguente **formula di riduzione ad un integrale doppio**:

$$\begin{aligned} \int \int_S f(x, y, z) d\sigma &= \\ &= \int \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v \right| dudv = \\ &= \int \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} dudv. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Esempio 1.5.1 *Sia*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tale che} \quad (x, y) \in D \quad \text{e} \quad z = f(x, y)\} \tag{1.11}$$

con $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio limitato e connesso e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(D)$. In conclusione, si ha

$$\int \int_S g(x, y, z) d\sigma = \int \int_D g(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy. \tag{1.12}$$

Proposizione 1.5.2 *Per gli integrali superficiali valgono le proprietà di*

- **linearità**: Qualunque siano le funzione continue f_1 e f_2 in V (dove V è un dominio di \mathbb{R}^3 tale che $S \subset V$), allora

$$\begin{aligned} \int_S (c_1 f_1(x, y, z) + c_2 f_2(x, y, z)) d\sigma &= c_1 \int_S f_1(x, y, z) d\sigma + \\ &+ c_2 \int_S f_2(x, y, z) d\sigma. \end{aligned}$$

- **additività:** Per ogni funzione f continua in V , e $S = S_1 \cup S_2$ unione di due superfici regolari S_1 e S_2 , allora

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \int_{S_1} f(x, y, z) d\sigma + \int_{S_2} f(x, y, z) d\sigma.$$

- **monotonia:** Date due funzioni reali f e g continue in V e tali che

$$f(x, y, z) \leq g(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in V,$$

allora

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma \leq \int_S g(x, y, z) d\sigma.$$

Esercizio 1.5.3 Si può calcolare il seguente integrale

$$\int_S z \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma,$$

ove S è la superficie regolare di equazioni parametriche

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = kv,$$

con $(u, v) \in [0, r] \times [0, 2\pi]$.

1.6 Applicazioni meccaniche

Sia

$$\rho : S \rightarrow [0, +\infty[$$

la densità di una distribuzione di massa sulla superficie S .

Definizione 1.6.1 *La massa totale M è definita da*

$$M = \int_S \rho(x, y, z) \, d\sigma,$$

*mentre il **centro di massa (baricentro)** G di S è definito come il punto di coordinate*

$$x_G = \frac{1}{M} \int_S x \rho(x, y, z) \, d\sigma,$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_S y \rho(x, y, z) \, d\sigma,$$

$$z_G = \frac{1}{M} \int_S z \rho(x, y, z) \, d\sigma.$$

Nel caso di una distribuzione uniforme di massa, cioè ρ costante, allora il baricentro G della superficie è dato da

$$x_G = \frac{1}{A(S)} \int_S x \, d\sigma,$$

$$y_G = \frac{1}{A(S)} \int_S y \, d\sigma,$$

$$z_G = \frac{1}{A(S)} \int_S z \, d\sigma.$$

Definizione 1.6.2 *Il **momento di inerzia** della distribuzione assegnata, rispetto a un dato asse r , è*

$$I_r = \int_S \rho(x, y, z) d^2(x, y, z) \, d\sigma,$$

dove $d(x, y, z)$ è la distanza del punto $P(x, y, z)$ dall'asse r .

Esempio 1.6.3 Si può calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse x di una distribuzione uniforme di massa, di densità $\rho = 1$, posta sulla superficie laterale S del cono rappresentato parametricamente da

$$\phi : [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definito da

$$r(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k}.$$

S è il cono di vertice l'origine e avente per base il cerchio

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}.$$

Il momento d'inerzia rispetto ad x è

$$I_x = \int_S \rho d^2 d\sigma,$$

dove d è la distanza del punto $P(x, y, z)$ dall'asse x , cioè $d = \sqrt{y^2 + z^2}$.

I vettori tangenti della curva coordinata sono

$$\mathbf{r}'_u = \cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'_v = -u \sin v \mathbf{i} + u \cos v \mathbf{j}$$

Da qui

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| &= |(-u \cos v, -u \sin v, u)| = \\ &= \sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v + u^2} = \sqrt{2u^2} = \sqrt{2}u. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} I_x &= \int_S (y^2 + z^2) d\sigma = \\ &= \int \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} (u^2 \sin^2 v + u^2) \sqrt{2}u \, du \, dv = \\ &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} (u^2 \sin^2 v + u^2) \sqrt{2}u \, dv = \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 u^3 du \int_0^{2\pi} (\sin^2 v + 1) \, dv = \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi. \end{aligned}$$

1.7 Integrali di superficie di seconda specie

Definizione 1.7.1 *Sia S una superficie regolare. Se è possibile scegliere il versore normale in modo che, partendo da un punto $P_0 \in S$ e seguendo una qualsiasi curva regolare e chiusa sulla superficie, il versore normale vari con continuità e ritorni nella posizione iniziale, allora si dice che la superficie S è **orientabile**.*

Il versore normale determina (localmente) l'orientamento della superficie.

Scelto un verso per la normale \mathbf{n} a S , si definisce **faccia positiva** della superficie regolare orientabile quella volta verso la normale positiva; l'altra faccia è detta **negativa**. Viceversa, fissata la faccia positiva di S , resta definita l'orientamento della normale.

La frontiera di S si orienta positivamente (e in tal caso si scrive ∂S^+) scegliendo il verso di percorrenza della curva ∂S in modo da lasciare i punti di S a sinistra.

Ora, sia fissato l'orientamento della superficie S e sia positiva la faccia superiore rispetto al piano xy , cioè la faccia per cui il vettore $\mathbf{n} (= \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k})$ della normale alla superficie forma un angolo $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ con l'asse z .

Definizione 1.7.2 *L'integrale di superficie di seconda specie esteso alla superficie regolare e orientata S è definito da*

$$\begin{aligned} & \int \int_{S^+} F_1(x, y, z) dydz + F_2(x, y, z) dzdx + F_3(x, y, z) dxdy \quad (1.13) \\ &= \int \int_{S^+} [F_1(x, y, z) \cos \alpha + F_2(x, y, z) \cos \beta + F_3(x, y, z) \cos \gamma] d\sigma = \\ &= \int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \end{aligned}$$

dove $\mathbf{F} = F_1(x, y, z) \mathbf{i} + F_2(x, y, z) \mathbf{j} + F_3(x, y, z) \mathbf{k}$.

Il termine

$$\int \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

rappresenta il **flusso del campo vettoriale \mathbf{F}** attraverso la superficie S .

Il flusso del **campo vettoriale \mathbf{F}** cambia di segno se cambia l'orientamento di S (cioè il verso di \mathbf{n}).

Sia S la superficie di equazione $\mathbf{r} = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, allora dalle equazioni (1.5, 1.13) si ottiene che

$$\begin{aligned} & \int \int_{S^+} F_1(x, y, z) dydz + F_2(x, y, z) dzdx + F_3(x, y, z) dxdy \\ &= \pm \int \int_D \mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v dudv, \quad (1.14) \end{aligned}$$

dove il segno $+$ se S e D hanno lo stesso orientamento, mentre il segno $-$ se S e D non hanno lo stesso orientamento.

1.8 Teoremi della divergenza e di Stokes nello spazio

Il teorema della divergenza nello spazio è simile a quello nel piano e trasforma un integrale triplo in un integrale superficiale:

Teorema 1.8.1 (*Teorema della divergenza*) Sia D un dominio regolare di \mathbb{R}^3 e sia $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vettoriale di classe $C^1(D)$. Allora, l'integrale su D della divergenza del campo \mathbf{F} è pari al flusso del campo uscente da D si ha

$$\int \int \int_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{\partial D^+} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) \, d\sigma,$$

dove \mathbf{n} è il campo normale alla frontiera ∂D di D orientato verso l'esterno del dominio D .

È facile provare il teorema di Stokes che permette di trasformare un integrale esteso ad una superficie regolare S in un integrale curvilineo esteso al bordo di S

Teorema 1.8.2 (*Formula di Stokes*) Siano S una superficie regolare avente il contorno chiuso e regolare orientato γ^+ e $V \subset \mathbb{R}^3$ un dominio contenente la superficie S . Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vettoriale di classe $C^1(V)$, allora sussiste la seguente formula

$$\oint_{\gamma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (1.15)$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} & \oint_{\gamma^+} F_1(x, y, z) dx + F_2(x, y, z) dy + F_3(x, y, z) dz \quad (\text{1.16}) \\ &= \int \int_S \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma \end{aligned}$$

dove la curva γ^+ è percorsa nel verso corrispondente alla superficie orientata S^+ , cioè un osservatore che si muove sulla curva C deve avere sempre a sinistra la faccia positiva della superficie considerata.

Definizione 1.8.3 L'integrale $\oint_{\gamma^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ è detto **circuitazione** del campo vettoriale lungo la curva chiusa e regolare γ^+ .

Esempio 1.8.4 Calcolare l'integrale di superficie di seconda specie

$$\int \int_S yz dy dz - zx dz dx + \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2} dx dy$$

esteso alla superficie

$$S = \left\{ \begin{array}{l} P(x, y, z) : \\ x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \end{array} \right\}.$$

Essendo $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$, si ricava

$$\mathbf{r}'_u = \cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{r}'_v = -u \sin v \mathbf{i} + u \cos v \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

per cui $E = 1, F = 0, G = 1 + u^2$ e $d\sigma = \sqrt{1 + u^2} du dv$. Pertanto, con la formula (1.14), otteniamo

$$\begin{aligned}
 I &= \int \int_S yz dy dz - zx dz dx + \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy = \\
 &= \int \int_D \left(uv + \frac{u}{1 + u^2 + v^2} \right) du dv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \left(uv + \frac{u}{1 + u^2 + v^2} \right) du = \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [v + \log(2 + v^2) - \log(1 + v^2)] dv = \\
 &= \pi^2 + \frac{v}{2} [\log(2 + v^2) - \log(1 + v^2)] \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \left(\frac{v^2}{2 + v^2} - \frac{v^2}{1 + v^2} \right) dv = \\
 &= \pi^2 + \pi \log \left(1 + \frac{1}{1 + 4\pi^2} \right) + \sqrt{2} \arctan(\pi\sqrt{2}) - \arctan(2\pi).
 \end{aligned}$$