
Esercizio n. 1

Funzione:

$$f(x,y) = x^3 + x\,y + y^3$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = 3\,x^2 + y$$

$$f'_y(x,y) = x + 3\,y^2$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = 6\,x$$

$$f'_{yy}(x,y) = 6\,y$$

$$f'_{xy}(x,y) = 1$$

$$Hf(x,y) = -1 + 36\,x\,y$$

Punto critico n. 1

$$P_1 = \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

$$Hf\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = 3 > 0$$

$$f'_{xx}\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = -2 < 0$$

Punto di massimo

Punto critico n. 2

$$P_2 = (0,0)$$

$$Hf(0,0) = -1 < 0$$

Punto di sella

Esercizio n. 2

Funzione:

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = -2\,e^{-x^2-y^2}\,x$$

$$f'_y(x,y) = -2\,e^{-x^2-y^2}\,y$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = e^{-x^2-y^2}\,(-2 + 4\,x^2)$$

$$f'_{yy}(x,y) = e^{-x^2-y^2}\,(-2 + 4\,y^2)$$

$$f'_{xy}(x,y) = 4\,e^{-x^2-y^2}\,x\,y$$

$$Hf(x,y) = e^{-2\,(x^2+y^2)}\,(4 - 8\,x^2 - 8\,y^2)$$

Punto critico n. 1

$P_1 = (0,0)$

$Hf(0,0) = 4 > 0$

$f'_{xx}(0,0) = -2 < 0$

Punto di massimo

Esercizio n. 3

Funzione:

$f(x,y) = x^2 + x^2 y + y^2$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = 2x(1+y)$

$f'_y(x,y) = x^2 + 2y$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = 2(1+y)$

$f'_{yy}(x,y) = 2$

$f'_{xy}(x,y) = 2x$

$Hf(x,y) = 4 - 4x^2 + 4y$

Punto critico n. 1

$P_1 = (-\sqrt{2},-1)$

$Hf(-\sqrt{2},-1) = -8 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 2

$P_2 = (\sqrt{2},-1)$

$Hf(\sqrt{2},-1) = -8 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 3

$P_3 = (0,0)$

$Hf(0,0) = 4 > 0$

$f'_{xx}(0,0) = 2 > 0$

Punto di minimo

Esercizio n. 4

Funzione:

$f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

$$f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = \frac{1+y^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f'_{yy}(x,y) = \frac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f'_{xy}(x,y) = -\frac{x\,y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$Hf(x,y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Punto critico n. 1

$P_1 = (0,0)$

$Hf(0,0) = 1 > 0$

$f'_{xx}(0,0) = 1 > 0$

Punto di minimo

Esercizio n. 5

Funzione:

$f(x,y) = -\mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{Sin}[2\,y]$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = -\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[2\,y]$

$f'_y(x,y) = -2\,\mathrm{Cos}[2\,y]\,\mathrm{Sin}[x]$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = \mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{Sin}[2\,y]$

$f'_{yy}(x,y) = 4\,\mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{Sin}[2\,y]$

$f'_{xy}(x,y) = -2\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Cos}[2\,y]$

$Hf(x,y) = -2\,(\mathrm{Cos}[2\,x] + \mathrm{Cos}[4\,y])$

Punto critico n. 1

$P_1 = (0,0)$

$Hf(0,0) = -4 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 2

$P_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\,\pi}{4}\right)$

$Hf\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\,\pi}{4}\right) = 4 > 0$

$f'_{xx}\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\,\pi}{4}\right) = -1 < 0$

Punto di massimo

Punto critico n. 3

$P_3 = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}\right)$

$Hf\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}\right) = 4 > 0$

$f'_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}\right) = 1 > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 4

$P_4 = \left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$

$Hf\left(0, -\frac{\pi}{2}\right) = -4 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 5

$P_5 = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

$Hf\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) = 4 > 0$

$f'_{xx}\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) = 1 > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 6

$P_6 = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

$Hf\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) = 4 > 0$

$f'_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) = -1 < 0$

Punto di massimo

Punto critico n. 7

$P_7 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

$Hf\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 4 > 0$

$f'_{xx}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = -1 < 0$

Punto di massimo

Punto critico n. 8

$P_8 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

$Hf\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 4 > 0$

$f'_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 1 > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 9

$P_9 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$Hf\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -4 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 10

$P_{10} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

$Hf\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) = 4 > 0$

$f'_{xx}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) = 1 > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 11

$P_{11} = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

$Hf\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) = 4 > 0$

$f'_{xx}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) = -1 < 0$

Punto di massimo

Osservazione: sono riportate solo le soluzioni ottenute applicando le funzioni inverse arcsin, arccos per risolvere le equazioni trigonometriche coinvolte, senza utilizzare la periodicità. In realtà, tenendo conto della periodicità, i punti critici sono infiniti.

Esercizio n. 6

Funzione:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - y^3$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = 2x$

$f'_y(x,y) = (2 - 3y)\,y$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = 2$

$f'_{yy}(x,y) = 2 - 6y$

$f'_{xy}(x,y) = 0$

$Hf(x,y) = 4 - 12y$

Punto critico n. 1

$P_1 = (0,0)$

$Hf(0,0) = 4 > 0$

$f'_{xx}(0,0) = 2 > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 2

$P_2 = \left(0, \frac{2}{3}\right)$

$Hf\left(0, \frac{2}{3}\right) = -4 < 0$

Punto di sella

Esercizio n. 7

Funzione:

$$f(x,y) = x^2 - 2y + x^2 y$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = 2x(1+y)$$

$$f'_y(x,y) = -2 + x^2$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = 2(1+y)$$

$$f'_{yy}(x,y) = 0$$

$$f'_{xy}(x,y) = 2x$$

$$Hf(x,y) = -4x^2$$

Punto critico n. 1

$$P_1 = (-\sqrt{2},-1)$$

$$Hf(-\sqrt{2},-1) = -8 < 0$$

Punto di sella

Punto critico n. 2

$$P_2 = (\sqrt{2},-1)$$

$$Hf(\sqrt{2},-1) = -8 < 0$$

Punto di sella

Esercizio n. 8

Funzione:

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = -\frac{2x}{(x^2+2y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = -\frac{4y}{(x^2+2y^2)^2}$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = \frac{6x^2 - 4y^2}{(x^2+2y^2)^3}$$

$$f'_{yy}(x,y) = -\frac{4(x^2 - 6y^2)}{(x^2+2y^2)^3}$$

$$f'_{xy}(x,y) = \frac{16xy}{(x^2+2y^2)^3}$$

$$Hf(x,y) = -\frac{24}{(x^2+2y^2)^4}$$

Nessun punto critico

Esercizio n. 9

Funzione:

$$f(x,y) = x\,\mathrm{Cos}[y]$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = \mathrm{Cos}[y]$$

$$f'_y(x,y) = -x\,\mathrm{Sin}[y]$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = 0$$

$$f'_{yy}(x,y) = -x\,\mathrm{Cos}[y]$$

$$f'_{xy}(x,y) = -\mathrm{Sin}[y]$$

$$Hf(x,y) = -\mathrm{Sin}[y]^2$$

Punto critico n. 1

$$P_1 = \left(0,-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$Hf\left(0,-\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$$

Punto di sella

Punto critico n. 2

$$P_2 = \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$Hf\left(0,\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$$

Punto di sella

Osservazione: sono riportate solo le soluzioni ottenute applicando le funzioni inverse arcsin, arccos per risolvere le equazioni trigonometriche coinvolte, senza utilizzare la periodicità. In realtà, tenendo conto della periodicità, i punti critici sono infiniti.

Esercizio n. 10

Funzione:

$$f(x,y) = x^2 + 2\,x\,y - x\,y^2$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = 2\,x - (-2 + y)\,y$$

$$f'_y(x,y) = -2\,x\,(-1 + y)$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = 2$$

$$f'_{yy}(x,y) = -2\,x$$

$$f'_{xy}(x,y) = 2 - 2\,y$$

$$Hf(x,y) = -4\,(x + (-1 + y)^2)$$

Punto critico n. 1

$P_1 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$Hf\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = 2 > 0$

$f'_{xx}\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = 2 > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 2

$P_2 = (0,0)$

$Hf(0,0) = -4 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 3

$P_3 = (0,2)$

$Hf(0,2) = -4 < 0$

Punto di sella

Osservazione: sono riportate solo le soluzioni ottenute applicando le funzioni inverse arcsin, arccos per risolvere le equazioni trigonometriche coinvolte, senza utilizzare la periodicità. In realtà, tenendo conto della periodicità, i punti critici sono infiniti.

Esercizio n. 11

Funzione:

$f(x,y) = -4x + x^2 + 8y + 2xy$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = 2(-2 + x + y)$

$f'_y(x,y) = 2(4 + x)$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = 2$

$f'_{yy}(x,y) = 0$

$f'_{xy}(x,y) = 2$

$Hf(x,y) = -4$

Punto critico n. 1

$P_1 = (-4,6)$

$Hf(-4,6) = -4 < 0$

Punto di sella

Esercizio n. 12

Funzione:

$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = 6(x^2 - y)$

$f'_y(x,y) = -6x + 6y$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = 12x$

$f'_{yy}(x,y) = 6$

$f'_{xy}(x,y) = -6$

$Hf(x,y) = -36 + 72x$

Punto critico n. 1

$P_1 = (0,0)$

$Hf(0,0) = -36 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 2

$P_2 = (1,1)$

$Hf(1,1) = 36 > 0$

$f'_{xx}(1,1) = 12 > 0$

Punto di minimo

Esercizio n. 13

Funzione:

$f(x,y) = x^3 + y^3 - (1 + x + y)^3$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = -3(1+y)(1+2x+y)$

$f'_y(x,y) = -3(1+x)(1+x+2y)$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = -6(1+y)$

$f'_{yy}(x,y) = -6(1+x)$

$f'_{xy}(x,y) = -6(1+x+y)$

$Hf(x,y) = -36(x + x^2 + y + xy + y^2)$

Punto critico n. 1

$P_1 = (-1,-1)$

$Hf(-1,-1) = -36 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 2

$P_2 = (-1,1)$

$Hf(-1,1) = -36 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 3

$P_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$Hf\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 12 > 0$

$f'_{xx}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -4 < 0$

Punto di massimo

Punto critico n. 4

$P_4 = (1, -1)$

$Hf(1, -1) = -36 < 0$

Punto di sella

Esercizio n. 14

Funzione:

$f(x, y) = -2 x^2 + x^4 + 2 y^2 - x^2 y^2$

Derivate prime:

$f'_x(x, y) = 2 x (-2 + 2 x^2 - y^2)$

$f'_y(x, y) = -2 (-2 + x^2) y$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x, y) = 12 x^2 - 2 (2 + y^2)$

$f'_{yy}(x, y) = 4 - 2 x^2$

$f'_{xy}(x, y) = -4 x y$

$Hf(x, y) = -4 (6 x^4 + 2 (2 + y^2) + x^2 (-14 + 3 y^2))$

Punto critico n. 1

$P_1 = (-1, 0)$

$Hf(-1, 0) = 16 > 0$

$f'_{xx}(-1, 0) = 8 > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 2

$P_2 = (0, 0)$

$Hf(0, 0) = -16 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 3

$P_3 = (1, 0)$

$Hf(1, 0) = 16 > 0$

$f'_{xx}(1, 0) = 8 > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 4

$P_4 = (-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$Hf(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -64 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 5

$P_5 = (\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$Hf(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -64 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 6

$P_6 = (-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$Hf(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = -64 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 7

$P_7 = (\sqrt{2},\sqrt{2})$

$Hf(\sqrt{2},\sqrt{2}) = -64 < 0$

Punto di sella

Esercizio n. 15

Funzione:

$$f(x,y) = \frac{x}{8} + \frac{x}{y} - y$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{8} + \frac{1}{y}$$

$$f'_y(x,y) = -1 - \frac{x}{y^2}$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = 0$$

$$f'_{yy}(x,y) = \frac{2\,x}{y^3}$$

$$f'_{xy}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$

$$Hf(x,y) = -\frac{1}{y^4}$$

Punto critico n. 1

$P_1 = (-64,-8)$

$Hf(-64,-8) = -\frac{1}{4096} < 0$

Punto di sella

Esercizio n. 16

Funzione:

$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = -\frac{2\,x\,y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = \frac{2\,x\,(x^2-3\,(1+y^2))}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$f'_{yy}(x,y) = -\frac{2\,(x+x^3-3\,x\,y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$f'_{xy}(x,y) = -\frac{2\,y\,(1-3\,x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$Hf(x,y) = -\frac{4\,(x^4+y^2+y^4+x^2\,(-3+2\,y^2))}{(1+x^2+y^2)^5}$$

Punto critico n. 1

$$P_1 = (-1,0)$$

$$Hf(-1,0) = \frac{1}{4} > 0$$

$$f'_{xx}(-1,0) = \frac{1}{2} > 0$$

Punto di minimo

Punto critico n. 2

$$P_2 = (1,0)$$

$$Hf(1,0) = \frac{1}{4} > 0$$

$$f'_{xx}(1,0) = -\frac{1}{2} < 0$$

Punto di massimo

Esercizio n. 17

Funzione:

$$f(x,y) = \frac{y}{2} + \frac{x^2+y^2}{4+x^2}$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = -\frac{2\,x\,(-4+y^2)}{(4+x^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{2\,y}{4+x^2}$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = \frac{2\,(-4+3\,x^2)\,(-4+y^2)}{(4+x^2)^3}$$

$$f'_{yy}(x,y) = \frac{2}{4+x^2}$$

$$f'_{xy}(x,y) = -\frac{4\,x\,y}{(4+x^2)^2}$$

$$Hf(x,y) = -\frac{4\,(4\,(-4+y^2)+x^2\,(12+y^2))}{(4+x^2)^4}$$

Punto critico n. 1

$$P_1 = (-2,-2)$$

$$Hf(-2,-2) = -\frac{1}{16} < 0$$

Punto di sella

Punto critico n. 2

$$P_2 = (2,-2)$$

$$Hf(2,-2) = -\frac{1}{16} < 0$$

Punto di sella

Punto critico n. 3

$$P_3 = (0,-1)$$

$$Hf(0,-1) = \frac{3}{16} > 0$$

$$f'_{xx}(0,-1) = \frac{3}{8} > 0$$

Punto di minimo

Esercizio n. 18

Funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{3-x^2-y^2}$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{3-x^2-y^2}}$$

$$f'_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = \frac{-3+y^2}{(3-x^2-y^2)^{3/2}}$$

$$f'_{yy}(x,y) = \frac{-3+x^2}{(3-x^2-y^2)^{3/2}}$$

$$f'_{xy}(x,y) = -\frac{x\,y}{(3-x^2-y^2)^{3/2}}$$

$$Hf(x,y) = \frac{3}{(-3+x^2+y^2)^2}$$

Punto critico n. 1

$$P_1 = (0,0)$$

$$Hf(0,0) = \frac{1}{3} > 0$$

$f'_{xx}(0,0) = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$

Punto di massimo

Esercizio n. 19

Funzione:

$f(x,y) = e^{-4x^2+x^4-3y^2+y^3}$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = 4\,e^{-4x^2+x^4+(-3+y)\,y^2}\,x\,(-2+x^2)$

$f'_y(x,y) = 3\,e^{-4x^2+x^4+(-3+y)\,y^2}\,(-2+y)\,y$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = 4\,e^{-4x^2+x^4+(-3+y)\,y^2}\,(-2+19x^2-16x^4+4x^6)$

$f'_{yy}(x,y) = e^{-4x^2+x^4+(-3+y)\,y^2}\,(-6+6y+36y^2-36y^3+9y^4)$

$f'_{xy}(x,y) = 12\,e^{-4x^2+x^4+(-3+y)\,y^2}\,x\,(-2+x^2)\,(-2+y)\,y$

$Hf(x,y) =$
$12\,e^{2(-4x^2+x^4+(-3+y)\,y^2)}\,(4-32x^4(-1+y)+8x^6(-1+y)-4y-24y^2+24y^3-6y^4+x^2(-38+38y+36y^2-36y^3+9y^4))$

Punto critico n. 1

$P_1 = (0,0)$

$Hf(0,0) = 48 > 0$

$f'_{xx}(0,0) = -8 < 0$

Punto di massimo

Punto critico n. 2

$P_2 = (0,2)$

$Hf(0,2) = -\frac{48}{e^8} < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 3

$P_3 = (-\sqrt{2},0)$

$Hf(-\sqrt{2},0) = -\frac{96}{e^8} < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 4

$P_4 = (\sqrt{2},0)$

$Hf(\sqrt{2},0) = -\frac{96}{e^8} < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 5

$P_5 = (-\sqrt{2},2)$

$Hf(-\sqrt{2},2) = \frac{96}{e^{16}} > 0$

$f'_{xx}(-\sqrt{2},2) = \frac{16}{e^8} > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 6

$P_6 = (\sqrt{2},2)$

$Hf(\sqrt{2},2) = \frac{96}{e^{16}} > 0$

$f'_{xx}(\sqrt{2},2) = \frac{16}{e^8} > 0$

Punto di minimo

Esercizio n. 20

Funzione:

$$f(x,y) = \text{Log}\left[-x + \frac{x^2}{2} + 3\,y - x\,y - \frac{y^2}{2}\right]$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = \frac{2\,(-1 + x - y)}{x^2 - (-6 + y)\,y - 2\,x\,(1 + y)}$$

$$f'_y(x,y) = -\frac{2\,(-3 + x + y)}{x^2 - (-6 + y)\,y - 2\,x\,(1 + y)}$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = \frac{-4 - 2\,x^2 + 4\,y - 6\,y^2 + 4\,x\,(1 + y)}{(x^2 - (-6 + y)\,y - 2\,x\,(1 + y))^2}$$

$$f'_{yy}(x,y) = -\frac{2\,(18 + 3\,x^2 + 2\,x\,(-7 + y) - 6\,y + y^2)}{(x^2 - (-6 + y)\,y - 2\,x\,(1 + y))^2}$$

$$f'_{xy}(x,y) = \frac{2\,(6 + x^2 + 2\,x\,(-3 + y) - 2\,y - y^2)}{(x^2 - (-6 + y)\,y - 2\,x\,(1 + y))^2}$$

$$Hf(x,y) = \frac{8\,(-2 + x^2 + 6\,y - y^2 - 2\,x\,(1 + y))}{(x^2 - (-6 + y)\,y - 2\,x\,(1 + y))^3}$$

Punto critico n. 1

$P_1 = (2,1)$

$Hf(2,1) = -8 < 0$

Punto di sella

Esercizio n. 21

Funzione:

$$f(x,y) = \text{ArcTan}[2\,x - x^2 - 4\,y^2]$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = \frac{2 - 2\,x}{1 + (-2\,x + x^2 + 4\,y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = -\frac{8\,y}{1 + (-2\,x + x^2 + 4\,y^2)^2}$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = \frac{2\left(-1+4(-1+x)^2(-2x+x^2+4y^2)-(-2x+x^2+4y^2)^2\right)}{(1+(-2x+x^2+4y^2)^2)^2}$$

$$f'_{yy}(x,y) = \frac{8(-1+4x^3-x^4-16xy^2+48y^4+x^2(-4+8y^2))}{(1+(-2x+x^2+4y^2)^2)^2}$$

$$f'_{xy}(x,y) = \frac{16(2-2x)y(2x-x^2-4y^2)}{(1+(-2x+x^2+4y^2)^2)^2}$$

$$Hf(x,y) = -\frac{16(-1-12x^3+3x^4+16y^2+48y^4+8x^2(2+3y^2)-8x(1+6y^2))}{(1-4x^3+x^4-16xy^2+16y^4+x^2(4+8y^2))^3}$$

Punto critico n. 1

$P_1 = (1,0)$

$Hf(1,0) = 4 > 0$

$f'_{xx}(1,0) = -1 < 0$

Punto di massimo

Esercizio n. 22

Funzione:

$f(x,y) = \mathrm{Log}[-8+6x-x^2-y^2]$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = \frac{2(-3+x)}{8-6x+x^2+y^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{2y}{8-6x+x^2+y^2}$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = -\frac{2(10-6x+x^2-y^2)}{(8-6x+x^2+y^2)^2}$$

$$f'_{yy}(x,y) = \frac{2(8-6x+x^2-y^2)}{(8-6x+x^2+y^2)^2}$$

$$f'_{xy}(x,y) = -\frac{4(-3+x)y}{(8-6x+x^2+y^2)^2}$$

$$Hf(x,y) = -\frac{4(10-6x+x^2+y^2)}{(8-6x+x^2+y^2)^3}$$

Punto critico n. 1

$P_1 = (3,0)$

$Hf(3,0) = 4 > 0$

$f'_{xx}(3,0) = -2 < 0$

Punto di massimo

Esercizio n. 23

Funzione:

$f(x,y) = 4-4x+x^2+y^2$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = 2(-2+x)$$

$$f'_y(x,y) = 2y$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = 2$$

$$f'_{yy}(x,y) = 2$$

$$f'_{xy}(x,y) = 0$$

$$Hf(x,y) = 4$$

Punto critico n. 1

$$P_1 = (2,0)$$

$$Hf(2,0) = 4 > 0$$

$$f'_{xx}(2,0) = 2 > 0$$

Punto di minimo

Esercizio n. 24

Funzione:

$$f(x,y) = \mathrm{Log}[6-4x+x^2-4y+2y^2]$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = \frac{2(-2+x)}{6-4x+x^2-4y+2y^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{4(-1+y)}{6-4x+x^2-4y+2y^2}$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = -\frac{2(2-4x+x^2+4y-2y^2)}{(6-4x+x^2-4y+2y^2)^2}$$

$$f'_{yy}(x,y) = \frac{4(2-4x+x^2+4y-2y^2)}{(6-4x+x^2-4y+2y^2)^2}$$

$$f'_{xy}(x,y) = -\frac{8(-2+x)(-1+y)}{(6-4x+x^2-4y+2y^2)^2}$$

$$Hf(x,y) = -\frac{8}{(6-4x+x^2-4y+2y^2)^2}$$

Nessun punto critico

Esercizio n. 25

Funzione:

$$f(x,y) = x^3 + 48\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) + y^3$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = \frac{3(-16+x^4)}{x^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{3(-16+y^4)}{y^2}$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = \frac{96}{x^3} + 6x$

$f'_{yy}(x,y) = \frac{96}{y^3} + 6y$

$f'_{xy}(x,y) = 0$

$Hf(x,y) = \frac{36(16+x^4)(16+y^4)}{x^3 y^3}$

Punto critico n. 1

$P_1 = (-2,-2)$

$Hf(-2,-2) = 576 > 0$

$f'_{xx}(-2,-2) = -24 < 0$

Punto di massimo

Punto critico n. 2

$P_2 = (-2,2)$

$Hf(-2,2) = -576 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 3

$P_3 = (2,-2)$

$Hf(2,-2) = -576 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 4

$P_4 = (2,2)$

$Hf(2,2) = 576 > 0$

$f'_{xx}(2,2) = 24 > 0$

Punto di minimo

Esercizio n. 26

Funzione:

$f(x,y) = 4x^2 + x^4 - 5y - 3x^2 y + 2y^2$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = 2x(4 + 2x^2 - 3y)$

$f'_y(x,y) = -5 - 3x^2 + 4y$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = 8 + 12x^2 - 6y$

$f'_{yy}(x,y) = 4$

$f'_{xy}(x,y) = -6x$

$Hf(x,y) = 4(8 + 3x^2 - 6y)$

Punto critico n. 1

$P_1 = (0, \frac{5}{4})$

$Hf(0, \frac{5}{4}) = 2 > 0$

$f'_{xx}(0, \frac{5}{4}) = \frac{1}{2} > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 2

$P_2 = (-1, 2)$

$Hf(-1, 2) = -4 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 3

$P_3 = (1, 2)$

$Hf(1, 2) = -4 < 0$

Punto di sella

Esercizio n. 27

Funzione:

$f(x, y) = x + x^2 + 2xy + x^2 y$

Derivate prime:

$f'_x(x, y) = 1 + 2y + 2x(1 + y)$

$f'_y(x, y) = x(2 + x)$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x, y) = 2(1 + y)$

$f'_{yy}(x, y) = 0$

$f'_{xy}(x, y) = 2(1 + x)$

$Hf(x, y) = -4(1 + x)^2$

Punto critico n. 1

$P_1 = (-2, -\frac{3}{2})$

$Hf(-2, -\frac{3}{2}) = -4 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 2

$P_2 = (0, -\frac{1}{2})$

$Hf(0, -\frac{1}{2}) = -4 < 0$

Punto di sella

Esercizio n. 28

Funzione:

$$f(x,y) = (-1+x)\,y + \text{ArcTan}[\sqrt{x}]$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}\,(2+2x)} + y$$

$$f'_y(x,y) = -1+x$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = \frac{-1-3x}{4x^{3/2}\,(1+x)^2}$$

$$f'_{yy}(x,y) = 0$$

$$f'_{xy}(x,y) = 1$$

$$Hf(x,y) = -1$$

Punto critico n. 1

$$P_1 = \left(1, -\frac{1}{4}\right)$$

$$Hf\left(1, -\frac{1}{4}\right) = -1 < 0$$

Punto di sella

Esercizio n. 29

Funzione:

$$f(x,y) = x + x^3 - 4xy + 2xy^2$$

Derivate prime:

$$f'_x(x,y) = 1 + 3x^2 - 4y + 2y^2$$

$$f'_y(x,y) = 4x\,(-1+y)$$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$$f'_{xx}(x,y) = 6x$$

$$f'_{yy}(x,y) = 4x$$

$$f'_{xy}(x,y) = 4\,(-1+y)$$

$$Hf(x,y) = 24x^2 - 16\,(-1+y)^2$$

Punto critico n. 1

$$P_1 = \left(0, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$Hf\left(0, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -8 < 0$$

Punto di sella

Punto critico n. 2

$$P_2 = \left(0, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$Hf(0, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}) = -8 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 3

$P_3 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$

$Hf(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1) = 8 > 0$

$f'_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1) = -2\sqrt{3} < 0$

Punto di massimo

Punto critico n. 4

$P_4 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$

$Hf(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1) = 8 > 0$

$f'_{xx}(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1) = 2\sqrt{3} > 0$

Punto di minimo

Esercizio n. 30

Funzione:

$f(x,y) = -2\,x\,y + 2\,x^2\,y + x\,y^2$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = y\,(-2 + 4\,x + y)$

$f'_y(x,y) = 2\,x\,(-1 + x + y)$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = 4\,y$

$f'_{yy}(x,y) = 2\,x$

$f'_{xy}(x,y) = 2\,(-1 + 2\,x + y)$

$Hf(x,y) = 8\,x\,y - 4\,(-1 + 2\,x + y)^2$

Punto critico n. 1

$P_1 = (0,0)$

$Hf(0,0) = -4 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 2

$P_2 = (0,2)$

$Hf(0,2) = -4 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 3

$P_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$Hf\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} > 0$

$f'_{xx}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 4

$P_4 = (1,0)$

$Hf(1,0) = -4 < 0$

Punto di sella

Esercizio n. 31

Funzione:

$f(x,y) = -x^2 + 2\,y^2 + x^2\,y^2 + x^3\,y^2$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = x\,(-2 + (2 + 3\,x)\,y^2)$

$f'_y(x,y) = 2\,(2 + x^2 + x^3)\,y$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = 2\,(-1 + (1 + 3\,x)\,y^2)$

$f'_{yy}(x,y) = 2\,(2 + x^2 + x^3)$

$f'_{xy}(x,y) = 2\,x\,(2 + 3\,x)\,y$

$Hf(x,y) = -4\,x^2\,(2 + 3\,x)^2\,y^2 + 4\,(2 + x^2 + x^3)\,(-1 + (1 + 3\,x)\,y^2)$

Punto critico n. 1

$P_1 = (0,0)$

$Hf(0,0) = -8 < 0$

Punto di sella

Esercizio n. 32

Funzione:

$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\,(-x + y)$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = e^{-x^2-y^2}\,(-1 + 2\,x^2 - 2\,x\,y)$

$f'_y(x,y) = e^{-x^2-y^2}\,(1 + 2\,x\,y - 2\,y^2)$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = -2\,e^{-x^2-y^2}\,(-3\,x + 2\,x^3 + y - 2\,x^2\,y)$

$f'_{yy}(x,y) = 2\,e^{-x^2-y^2}\,(x - 3\,y - 2\,x\,y^2 + 2\,y^3)$

$f'_{xy}(x,y) = 2\,e^{-x^2-y^2}\,(y - 2x^2 y + x(-1 + 2y^2))$

$Hf(x,y) = -8\,e^{-2(x^2+y^2)}\,(x^4 - 2x^3 y - 2xy(-2 + y^2) + y^2(-1 + y^2) + x^2(-1 + 2y^2))$

Punto critico n. 1

$P_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$Hf(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{8}{e} > 0$

$f'_{xx}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{3}{\sqrt{e}} < 0$

Punto di massimo

Punto critico n. 2

$P_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$Hf(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{8}{e} > 0$

$f'_{xx}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{\sqrt{e}} > 0$

Punto di minimo

Esercizio n. 33

Funzione:

$f(x,y) = -2x^2 + x^4 + 4xy - 2y^2 + y^4$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = 4(-x + x^3 + y)$

$f'_y(x,y) = 4(x - y + y^3)$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = -4 + 12x^2$

$f'_{yy}(x,y) = -4 + 12y^2$

$f'_{xy}(x,y) = 4$

$Hf(x,y) = -48y^2 + 48x^2(-1 + 3y^2)$

Punto critico n. 1

$P_1 = (0,0)$

$Hf(0,0) = 0 = 0$

Indeterminato

Punto critico n. 2

$P_2 = (0,0)$

$Hf(0,0) = 0 = 0$

Indeterminato

Punto critico n. 3

$P_3 = (0,0)$

$Hf(0,0) = 0 = 0$

Indeterminato

Punto critico n. 4

$P_4 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$Hf(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 384 > 0$

$f'_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20 > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 5

$P_5 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$Hf(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 384 > 0$

$f'_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20 > 0$

Punto di minimo

Esercizio n. 34

Funzione:

$f(x,y) = 2\,Cos[x]\,Sin[x] + 2\,Cos[y]\,Sin[y]$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = 2\,Cos[2\,x]$

$f'_y(x,y) = 2\,Cos[2\,y]$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = -8\,Cos[x]\,Sin[x]$

$f'_{yy}(x,y) = -8\,Cos[y]\,Sin[y]$

$f'_{xy}(x,y) = 0$

$Hf(x,y) = 64\,Cos[x]\,Cos[y]\,Sin[x]\,Sin[y]$

Punto critico n. 1

$P_1 = \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$

$Hf\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right) = 16 > 0$

$f'_{xx}\left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right) = 4 > 0$

Punto di minimo

Punto critico n. 2

$P_2 = \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$

$Hf\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right) = -16 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 3

$P_3 = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

$Hf\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = -16 < 0$

Punto di sella

Punto critico n. 4

$P_4 = \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

$Hf\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = 16 > 0$

$f'_{xx}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = -4 < 0$

Punto di massimo

Osservazione: sono riportate solo le soluzioni ottenute applicando le funzioni inverse arcsin, arccos per risolvere le equazioni trigonometriche coinvolte, senza utilizzare la periodicità. In realtà, tenendo conto della periodicità, i punti critici sono infiniti.

Esercizio n. 35

Funzione:

$f(x,y) = 6x - x^2 - 2y - 2xy + y^2$

Derivate prime:

$f'_x(x,y) = -2(-3 + x + y)$

$f'_y(x,y) = -2(1 + x - y)$

Derivate seconde e determinante hessiano:

$f'_{xx}(x,y) = -2$

$f'_{yy}(x,y) = 2$

$f'_{xy}(x,y) = -2$

$Hf(x,y) = -8$

Punto critico n. 1

$P_1 = (1,2)$

$Hf(1,2) = -8 < 0$

Punto di sella